ROZPRAWY
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM I

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1921
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
WARSZAWA — KRAKÓW — POZNAŃ — LUBLIN — ŁODŹ

ROZPRAWY
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM I

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1921
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
WARSZAWA — KRAKÓW — POZNAŃ — LUBLIN — ŁODŹ

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO W KRAKOWIE
POD ZARZĄDEM JÓZEFA FILIPOWSKIEGO.

Funkcja nadlogarytmowa

w związku z określeniem pewnej klasy funkcji całkowitych.

Napisał

Juljusz Rudnicki.

WSTĘP.

Cel pracy. — Główniejsze otrzymane wyniki.

Cel tej pracy jest podwójny:

1) W pierwszej części zajmuję się badaniem funkcji odwrotnej do funkcji nadwykładniczej, t. j. funkcją nadlogarytmową $T(Z)$.

2) W drugiej części określam pewną klasę funkcji całkowitych, posiadających pewną wspólną własność analityczną.

Dodatek zawiera pewne twierdzenie pomocnicze.

Główniejsze wyniki.

1) Co do punktu pierwszego. Dowodzę, iż funkcja nadlogarytmowa jest funkcją wielowartościową, której jedynemi punktami osobliwemi (krytycznemi) są punkty płaszczyzny zmiennej zespolonej położone na osi liczb rzeczywistych o odciętej $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = a$, $\omega_4 = a^{\omega_3}$, ..., $\omega_n = a^{\omega_{n-1}}$, ... i oprócz tego punkt e^{β}, który jest punktem granicznym poprzednich, gdyż $\lim\limits_{n=\infty} \omega_n = e^{\beta}$; oprócz tego punkt w nieskończoności jest także punktem osobliwym.

Dla gałęzi głównej, którą oznaczam $T(Z)$, wszystkie powyżej wymienione punkty (ω) są punktami osobliwymi. Okrążając punkt ω_1, otrzymamy nowe gałęzie, które nie posiadają żadnych innych punktów osobliwych, prócz punktów 0 i ∞, czyli ω_1 i ∞. Przez okrążanie punktu ω_2 otrzymamy nowy ciąg gałęzi o punktach osobliwych 0, 1 i ∞. W ten sam sposób przez okrążanie punktu ω_3

otrzymamy gałęzie o punktach osobliwych 0, 1, a, ∞ i t. d. Tak punkt ω_n da nam gałęzie o punktach osobliwych ω_1, ω_2, ω_3, ..., ω_n i ∞. Ogół otrzymanych w ten sposób gałęzi wyczerpuje, jak to okazuję, wszystkie gałęzie funkcji nadwykładniczej $\mathfrak{T}(Z)$.

Stąd wynika w bardzo prosty sposób schemat wzajemnego powiązania gałęzi funkcji wielowartościowej $\mathfrak{T}(Z)$, jako też możność dania bardzo prostego znakowania dla otrzymania nomenklatury wszystkich gałęzi funkcji nadlogarytmowej.

Co do punktu drugiego. Wiadomo, iż każda funkcja $H(Z)$ całkowita bez miejsc zerowych jest kształtu $H(Z) = e^{\Theta(Z)}$, gdzie $\Theta(Z)$ jest funkcją całkowitą dowolną. Innemi słowy, logarytm takiej funkcji jest także funkcją całkowitą. Otóż funkcja nadwykładnicza posiada tę samą własność, ale jakgdyby uwielokrotnioną do nieskończoności, t. j. ta własność utrzymuje się przy iterowaniu logarytmowania; Log $H(z)$ nie tylko jest funkcją całkowitą, ale i jej logarytm Lg $\{$Lg $H(z)\}$ także i t. d. do nieskończoności. — Połóżmy więc Log $H(z) = \Theta_1(z)$, Log $\Theta_1(z) = \Theta_2(z)$, Log $\Theta_2(z) = \Theta_3(z)$, ..., $\Theta_n(z) =$ Log $\Theta_{n-1}(z)$,.... Funkcja $\Theta_n(z)$ jest dla jakiegokolwiek wskaźnika n funkcją całkowitą. Udawadniam teraz twierdzenie odwrotne, t. j. że każda funkcja $H(z)$, posiadająca tylko wzmiankowaną własność, jest koniecznie kształtu $\mathcal{E}\{\Theta(z)\}$, gdzie $\mathcal{E}(z)$ jest symbolem funkcji nadwykładniczej, a $\Theta(z)$ oznacza dowolną funkcję całkowitą.

Znakowanie i symbole.

Ponieważ w dalszych wywodach i wzorach funkcja logarytmowa posiadać będzie częste zastosowanie, więc dla uniknięcia nieporozumień przyjmiemy następujące symbole przy znakowaniu.

lg z oznaczać będzie logarytm naturalny.
$\lg_\alpha z$ oznaczać będzie logarytm przy zasadzie α.
Log z oznaczać będzie logarytm przy zasadzie a.
$\mathrm{Log}_n\, z$ oznaczać będzie n-krotną iterację logarytmu;

tak iż $\mathrm{Log}_2\, z = \mathrm{Log}\{\mathrm{Log}\, z\}$, $\mathrm{Log}_3\, z = \mathrm{Log}\{\mathrm{Log}_2\, z\}$ i t. d.; zasadą jest tu zawsze liczba a. Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Log z, $\mathrm{Log}_2\, z$,..., $\mathrm{Log}_n\, z$,... będą oznaczały odpowiednie funkcje wielowartościowe. Często chodzić nam będzie o funkcję jednowartościową; wtedy określimy tak zwaną gałąź główną naszej funkcji. Gałąź główną funkcji Log z oznaczać będziemy przez Lg z, gałąź gló-

wną funkcji $\mathrm{Log}_2\, z$ — przez $\mathrm{Lg}_2\, z$; wogóle, gałęź główną funkcji $\mathrm{Log}_n\, z$ oznaczymy przez $\mathrm{Lg}_n\, z$.

Tak samo, za pomocą $\mathfrak{T}(Z)$ oznaczać będziemy funkcję wielowartościową, jako zespół wszystkich gałęzi funkcji nadwykładniczej; gałęź główną zaś oznaczymy zapomocą symbolu $T(Z)$.

CZĘŚC PIERWSZA.

Funkcja nadlogarytmowa.

1. Określenia i uwagi wstępne.

Funkcją nadlogarytmową nazywać będziemy funkcję otrzymaną przez odwrócenie funkcji nadwykładniczej $\mathcal{E}(z) = Z$ i oznaczać będziemy przez $z = \mathfrak{T}(Z)$. Gałęzią główną nazywać będziemy tę gałęź, dla której funkcja przyjmuje wartość $z = 0$, gdy zmienna $Z = e^{\alpha}$. Dokładne określenie podane będzie niżej. Gałęź główną oznaczać będziemy przez $z = T(Z)$.

Przez odwrócenie zależności $\mathcal{E}(z) = Z$ w otoczeniu punktu $z = 0$, $Z = e^{\alpha}$, otrzymamy szereg potęgowy, rozwinięcie funkcji z według potęg różnicy $Z - e^{\alpha}$ i szereg ten, jak okażemy, jest zbieżny wewnątrz pewnego koła. Szereg ten przyjmiemy jako element zasadniczy badanej funkcji analitycznej; funkcję $\mathfrak{T}(Z)$ określimy jak ogół wszystkich wartości, które można osiągnąć przez przedłużenie analityczne naszego elementu zasadniczego, szeregu potęgowego, o którym była mowa wyżej.

2. Odwrócenie zależności $\mathcal{E}(z) = Z$.

Niech η oznacza liczbę rzeczywistą zawartą między liczbami e^{β} i e^{α}, dalej Z_0 niech będzie liczbą, spełniającą warunek $X > Z_0 > \eta$, gdzie X oznacza liczbę tak wielką, jak się podoba. Niech teraz z_0 oznacza liczbę (rzeczywistą), spełniającą warunek $\mathcal{E}(z_0) = Z_0$; taka liczba rzeczywista istnieje i jest określoną jednoznacznie, ponieważ $Z_0 > e^{\beta}$.

Gdy Z_0 zawarte jest w przedziale (η, X), t. j. gdy $\eta \leqslant Z_0 \leqslant X$, to $|z_0|$ pozostaje mniejsze od liczby, którą oznaczymy przez Y, tak iż będziemy mieli zawsze $|z_0| < Y$. Niech M oznacza maximum modułu funkcji $\mathcal{E}(z)$ na kole C o promieniu $Y + r$, gdzie r jest

liczbą dodatnią zresztą dowolną; niech m oznacza liczbę dodatnią, posiadającą tę własność, iż $\mathcal{E}'(z) > m$, gdy zmienna z jest wewnątrz lub na kole C. Taka liczba m istnieje, ponieważ równanie $\mathcal{E}'(z)$ nie posiada pierwiastków. Używając metody funkcji zwyższającej (fonction majorante), udowodnimy w znany sposób (patrz np. Goursat, Cours d'An. t. I. l. 187 i 190), iż szereg o spółczynnikach rzeczywistych, t. j. rozwinięcie

$$(1) \quad z - z_0 = a_1 (Z - Z_0) + a_2 (Z - Z_0)^2 + \ldots + a_n (Z - Z_0)^n + \ldots$$

funkcji odwrotnej jest zbieżne; promień zbieżności ϱ tego szeregu jest większe od pewnej określonej liczby ϱ_0, niezależnej od Z_0; to ma miejsce o ile, oczywiście, $\eta \leqslant Z_0 \leqslant X$; (liczba ϱ_0 zależy od η i X za pośrednictwem liczb m i M.).

Stąd wynika, że funkcja odwrotna za pomocą rozważań tylko co wyłożonych została przez nas określona wewnątrz pewnego obszaru (B). Obszar ten otrzymać można w sposób następujący: Niech w szeregu (1) Z_0 ma wartość, należącą do przedziału (η, X); dla każdego z tych punktów Z_0 utwórzmy rozwinięcie (1) i połączmy razem obszary zbieżności tych szeregów; są to koła o promieniu co najmniej równym ϱ_0; zbiór tych kół da nam obszar jednospójny (B), zawierający między innemi odcinek (η, X) osi liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez $T(Z)$ funkcję tak określoną wewnątrz (B). Funkcja $T(Z)$ spełnia równanie $T(a^Z) = \alpha\, T(Z)$, co jest bezpośrednio widoczne, o ile np. Z i a^Z należą do odcinka (η, X) osi liczb rzeczywistych; lecz w takim razie równanie funkcyjne

$$(2) \qquad T(a^Z) = \alpha\, T(Z)$$

spełnione jest także i dla wartości zespolonych, o ile należą do (B).

W tym wypadku, gdy $Z_0 = e^\alpha$, równanie funkcyjne (2) z łatwością daje możność otrzymania współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ w rozwinięciu (1). Wygodnie nam będzie zamiast funkcji $T(Z)$ wprowadzić funkcję $t(Z) = e^{-\alpha} . T(Ze^\alpha)$; wtedy $t'(1) = T'(e^\alpha) = 1$, $\ldots$, $t^{(n)}(1) = e^{\alpha(n-1)}\, T^{(n)}(e^\alpha)$. Połóżmy $\alpha_n = (-1)^{n-1}\, t^{(n)}(1)$. Przez kolejne różniczkowanie wzoru (2) i po podstawieniu następnie $Z = e^\alpha$, otrzymamy wzór redukcyjny:

$$(3) \quad \alpha_{n+1} = \frac{\alpha}{\alpha^n - 1} A_1^{(n+1)} \alpha_n + \frac{\alpha^2}{\alpha^n - 1} A_2^{(n+1)} \alpha_{n-1} + \ldots + \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} A_n^{(n+1)} \alpha_1,$$

gdzie $A_p^{(n)}$ oznacza sumę wszystkich iloczynów po p czynników utworzonych z liczb 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$. Ponieważ $a_2 = 1$, otrzymujemy kolejno

$$a_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad a_3 = \frac{\alpha^2 (1 + 2\alpha)}{(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)} \text{ i t. d.}$$

Co się tyczy spółczynników a_n, ze wzoru (3) przy pomocy indukcji wnosimy, iż $a_n > 0$ dla każdego n.

Otrzymujemy więc rozwinięcie funkcji nadlogarytmowej na szereg w postaci następującej:

$$(4) \qquad t(1+x) = x - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha^2(2\alpha+1)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + \\ + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\alpha^{n-1} Q_n(\alpha)}{(\alpha^{n-1}-1)\dots(\alpha-1)} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

gdzie $Q_n(\alpha)$ oznacza wielomian względem α stopnia $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Szereg nadlogarytmowy (4) analogiczny jest do znanego szeregu logarytmowego

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

3. Zbieżność szeregu nadlogarytmowego.

Wiemy już z poprzedniego, że szereg (4) jest zbieżny. Ustalimy teraz, że promień zbieżności tego szeregu równa się $\frac{\alpha - \beta}{\alpha}$. Dla udowodnienia tego twierdzenia podstawmy w (4) na miejsce Z liczbę przeciwną $-Z$. Wtedy wszystkie współczynniki rozwinięcia są tego samego znaku, a stąd wniosek, iż na kole zbieżności z lewej strony punkt leżący na osi liczb rzeczywistych jest z pewnością punktem osobliwym. Gdyby więc promień zbieżności szeregu nadlogarytmowego (4) był $\varrho < \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 1 - \frac{e^\beta}{e^\alpha}$, to punkt Z_0 tego koła, na osi liczb rzeczywistych między $\frac{e^\beta}{e^\alpha}$ i 1, byłby punktem osobliwym, co jest w sprzeczności z otrzymanem poprzednio wynikiem, iż szereg (1) jest zbieżny dla wszystkich wartości Z_0 większych od e^β. Z drugiej strony punkt $\frac{\beta}{\alpha}$ nie może być punktem re-

gularnym dla badanej gałęzi funkcji $t(Z)$; w rzeczy samej, gdyby promień zbieżności ϱ szeregu (4) był większy od $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, to funkcja $e^{-\alpha}\mathcal{E}(ze^{\alpha})$ przyjmowała by wartość $\frac{\beta}{\alpha}$ dla pewnej wartości zmiennej z, a funkcja $\mathcal{E}(z)$ przybierałaby wartość e^{β} dla pewnej określonej wartości rzeczywistej zmiennej z, co jest niemożliwe, gdyż $\mathcal{E}(z) > e^{\beta}$ dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej z. — Twierdzenie o promieniu zbieżności szeregu nadlogarytmowego jest więc udowodnione.

4. Określenie obszarów D i D'.

Wyodrębnijmy na osi liczb rzeczywistych zbiór punktów utworzonych w sposób następujący: najprzód punkt 0, a następnie punkty otrzymane przy pomocy kolejnego zastosowania przekształceń $z_1 = a^z$ do punktu początkowego 0; oznaczymy te punkty: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$, tak iż $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = a, \ldots$, $\omega_n = a^{\omega_{n-1}}, \ldots$ Zamknijmy ten zbiór, przyłączając doń punkt graniczny e^{β}, W ten sposób otrzymany zbiór oznaczać będziemy (ω).

Zakreślmy teraz na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z koło C o promieniu R dowolnie wielkim z punktu 0 jako ze środka; zakładamy $R > e^{\beta}$, tak iż wszystkie punkty (ω) są wewnątrz C. Zakreślmy następnie n kół $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, otaczających odpowiednio punkty $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, — przyczem ω_p niech będzie środkiem koła C_p dla $p = 1, 2, \ldots, n$. Promienie tych kół mogą być dowolnie małe, w każdym razie o tyle, że wzajemnie nie zachodzą na siebie. Nakreślmy wreszcie koło γ_n z punktu e^{β} jako ze środka tak, by to koło przechodziło między punktami ω_n i ω_{n+1}, nie przecinając koła C_n. Wewnątrz tych kół C_p i γ_n znajdują się więc wszystkie punkty zbioru (ω).

Możemy teraz określić obszar D. Utworzony jest ze wszystkich punktów płaszczyzny zmiennej zespolonej leżących wewnątrz koła C lub na kole C, a zewnątrz kół C_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ i koła γ_n lub na obwodzie jednege z tych kół. Można krótko powiedzieć, że obszar D otrzymujemy przez usunięcie z płaszczyzny zmiennej zespolonej obszarów, stanowiących otoczenia punktów (ω) i punktu w nieskończoności.

Określmy teraz kontur zamknięty L; utworzymy linję L przy pomocy obwodów kół C, C_p, γ_n i odcinków osi liczb rzeczywistych, łączących obwody tych kół, przyczem odcinki te będziemy

brali podwójnie w dwóch przeciwnych sobie zwrotach. Niech A i B oznaczają dwa punkty przecięcia się koła C z osią liczb rzeczywistych, przyczem A niech oznacza ten z tych dwóch punktów, którego odcięta jest dodatnia. Kontur L przebiegniemy w sposób następujący, zacząwszy od punktu A po kole C w kierunku dodatnim obrotów do punktu B, od punktu B przebiegniemy odcinek CC_1 osi liczb rzeczywistych w zwrocie dodatnim do koła C_2, potem opiszemy półkole C_1 w kierunku ujemnym, następnie odcinek C_1C_2, potem wykonamy pół obrotu po kole C_2 i t. d. aż do koła γ_n, które zatoczymy całkowicie, tak by wrócić z powrotem do punku połączenia γ_n z odcinkiem $C_n\gamma_n$; następnie wracamy, przebiegając powtórnie odcinek $C_n\gamma_n$, ale w zwrocie przeciwnym, następnie idziemy po kole C_n, zakreślając to półkole, które dotychczas nie zużytkowaliśmy, następnie biegniemy po odcinku $C_n C_{n-1}$, potem zakreślamy półkole C_{n-1} i t. d., aż wrócimy do punktu B; kierunek obrotu na kołach C_p, (dla $p = 1, 2, 3, \ldots, n$) jest więc zawsze ujemny. Od punktu B biegniemy znów po kole C, tak by wrócić w kierunku obrotów dodatnich do punktu początkowego A.

Określiwszy kontur L, możemy teraz przystąpić do określenia obszaru D'. Obszar D' jest w zasadzie identyczny z obszarem D, a tem tylko od niego różne, że odcinki prostolinijne konturu L są tu cięciami i posiadają skutkiem tego dwa brzegi, z których jeden tylko (brzeg) należy do D', a drugi — nie. Przyjmiemy, jako należące do D' te punkty brzegowe, które są granicą punktów wewnętrznych o rzędnej dodatniej. Tak więc obszar D' w przeciwieństwie do D nie jest zamknięty.

5. Twierdzenie pomocnicze.

Chodzi nam teraz o to, by przedłużyć poza dotychczasowy zakres istnienia element funkcji analitycznej. wyrażony przez szereg nadlogarytmowy. W tym celu potrzebnem nam będzie pewne twierdzenie pomocnicze. które tutaj podamy. Przekształceniu $z_1 = a^z$ odpowiada przekształcenie odwrotne $z_{-1} = \mathrm{Lg}\, z$; by to przekształcenie uczynić jednoznacznem, podzielmy płaszczyznę zmiennej zespolonej na pasma prostemi równoległemi do osi liczb rzeczywistych; wzajemna odległość tych prostych niech równa się $\frac{2\pi}{m}$. Jako pierwsze pasmo przyjmiemy obszar punktów $z = x + iy$, dla których $-\frac{\pi}{m} < y \leqq \frac{\pi}{m}$. Jeżeli teraz umówimy się brać pod uwagę

z pośród punktów, które powstają przez poddanie punktu dowolnego M przekształceniu $z_{-1} = \mathrm{Lg}\, z$, tylko ten punkt, który znajduje się w paśmie pierwszem, to ten punkt M_{-1}, o ile istnieje, jest, oczywiście określony jednoznacznie. Stosując to samo przekształcenie parokrotnie kolejno, otrzymamy kolejno M_{-1}, M_{-2}, $M_{-3}, \ldots, M_{-n}$ i t. d. Otóż $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^{\alpha}$.

W tej postaci to twierdzenie o punkcie granicznym nam nie wystarcza, gdyż chodzić nam będzie o zbieżność jednostajną. Zresztą punkt graniczny nie istnieje lub jest różny od e^{α} o ile punkt M jest jednym z punktów (ω).

Ostatecznie twierdzenie pomocnicze, o które nam chodzi jest następujące:

Jeśli punkt M należy do obszaru D, to $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^{\alpha}$, przyczem zbieżność jest jednostajna.

Dla zachowania ciągłości, twierdzenie to udowodnimy na końcu tej pracy w „dodatku“.

6. O pewnej własności obszaru D'.

Zależność $Z = a_n(z)$ określimy w sposób następujący: dla $n = 1$, oznacza $Z = a^z$, dla $n > 1$, $a_n(z) = a^{a_{n-1}(z)}$. W ten sposób określona funkcja $Z = a_n(z)$ jest funkcją jednowartościową zmiennej z. Zastanówmy się teraz nad tem, w jakich warunkach odwrócenie tej zależności będzie także jednowartościowe. W przypadku, gdy $n = 1$, wystarczy przeprowadzić w tym celu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z jedno cięcie (coupure), uniemożliwiające obrót naokoło punktu początkowego 0. Gdy $n = 2$, by odwrócenie było jednoznaczne, trzeba już dwóch cięć, by obrót nie tylko naokoło punktu 0, ale także naokoło punktu 1 stał się niemożliwy. W wypadku ogólnym, należy przeprowadzić n cięć, by uniemożliwić obrót naokoło któregokolwiek z punktów $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Otóż z określenia obszaru D' wynika, iż nie wychodząc z D' nie jest możliwe otoczyć którykolwiek z punktów ω_n. Tak więc obszar D' posiada tę własność, iż zależność między wartościami z i Z, związanymi równaniem $z = \mathrm{Log}_n\, Z$ t. j. $Z = a_n(z)$, gdy Z zmienia się po jakiejkolwiek drodze w sposób ciągły wewnątrz D', jest odwracalnie jednoznaczna, t. j. nietylko jednej wartości z odpowiada jedna wartość Z, ale i odwrotnie, jednej wartości Z odpowiada jedna tylko wartość dla z. Ogół wartości, który osiągamy powyżej wymieniony sposób dla z stanowi jedną gałęź wielowar-

tościowej funkcji $z = \mathrm{Log}_n Z$; jeśli, oprócz tego, dla $Z = e^{\alpha}$, także $z = e^{\alpha}$, to mamy gałęź „główną“, którą oznaczymy przez $z = \mathrm{Lg}_n Z$.

Jasna rzecz, iż własność wspomniana ma miejsce jakąkolwiek byłaby liczba całkowita dodatnia n w zależności badanej $Z = a_n(z)$.

7. Rozszerzenie poprzedniej własności obszaru D' na przypadek, gdy zamiast zależności $Z = a_n(z)$ mamy zależność $Z = \mathcal{E}(z)$ Określenie gałęzi głównej funkcji nadlogarytmowej.

Znamy rozwinięcie funkcji $T(Z)$ w szereg według potęg różnicy $Z - e^{\alpha}$; promień zbieżności tego szeregu równa się $e^{\alpha} - e^{\beta}$ jak to wynika z porównania tego szeregu z pokrewnym mu szeregiem nadlogarytmowym. Udowodnimy teraz, że, wychodząc z tego rozwinięcia, jako z elementu funkcji analitycznej, możemy otrzymać przedłużenie naszej funkcji wewnątrz całego obszaru D' nie napotykając żadnego punktu osobliwego, a więc otrzymamy funkcję określoną jednoznacznie wewnątrz D', którą to funkcję nazwiemy gałęzią główną funkcji $\mathcal{T}(Z)$ i oznaczymy przez $T(Z)$. Wzmiankowane przedłużenie analityczne osiągniemy, opierając się na równaniu funkcyjnem, któremu czyni zadość funkcja nadlogarytmowa i które pozwoliło obliczyć współczynniki szeregu nadlogarytmowego.

Szereg, służący nam za punkt wyjścia jest kształtu:

$$T(Z) = (Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)e^{\alpha}}(Z - e^{\alpha})^2 + \tag{6}$$

$$+ \frac{\alpha^2(2\alpha + 1)}{3!\,(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)e^{2\alpha}}(Z - e\ )^3 - \ldots,$$

zbieżny wewnątrz koła U o promieniu $e^{\alpha} - e^{\beta}$.

Utwórzmy teraz nowy szereg, mnożąc współczynniki poprzedniego szeregu przez α i zastępując Z przez $\mathrm{Lg}\, Z$, gdzie $\mathrm{Lg}\, Z$ oznacza gałęź główną funkcji $\mathrm{Log}\, Z$.

Otrzymany w ten sposób szereg jest zbieżny wewnątrz pewnego obszaru, który już nie jest kołem U o środku e^{α} i o promieniu $e^{\alpha} - e^{\beta}$, lecz, jak łatwo sprawdzić, zawiera punkta, znajdujące się zewnątrz U; niech U_1 oznacza ten nowy obszar, a $f(Z)$ — funkcję określoną przez ten szereg wewnątrz U_1.

Mamy:

$$(7) \qquad f(Z) = \alpha(\text{Lg}\, Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha^2(\text{Lg}\, Z - e^{\alpha})^2}{2!(\alpha-1)e} + \\ + \frac{\alpha^3(2\alpha+1)(\text{Lg}\, Z - e^{\alpha})^3}{3!(\alpha^3-1)(\alpha-1)e^{2\alpha}} - \ldots$$

W badaniu funkcji $f(Z)$ ograniczymy się do tej części obszaru U_1, która znajduje się wewnątrz D'. Ponieważ wtedy Z nie może otoczyć punktu początkowego 0 na skutek przekrojów obszaru D', gałęź logarytmu Lg Z nie może zmienić się na inną, gdy Z przebiega jakąkolwiek drogę wewnątrz D', tak iż w szeregu (7) gałęź Lg Z nie ulega zmianie.

Obszary zbieżności szeregów (6) i (7), mianowicie U i U_1 mają z pewnością część wspólną, ponieważ Lg Z dąży do granicy e^{α}, gdy Z dąży do e^{α}. Niech σ oznacza tę część wspólną. Niech Z należy do σ; wtedy Z i Lg Z należą jednocześnie do obszaru U. Lecz szereg (7) można napisać w postaci

$$(8) \qquad \alpha\, \text{Lg}\left(1+\frac{Z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right) - \frac{\alpha^2}{2!(\alpha-1)e^{\alpha}}\left\{\text{Lg}\left(1+\frac{Z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)\right\}^2 + \ldots.$$

W szeregu (8) możemy $\text{Lg}\left(1+\frac{Z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)$ zastąpić rozwinięciem na szereg według potęg rosnących różnicy $Z - e^{\alpha}$ i w szeregu podwójnym (à double entrée) tak otrzymanym uporządkować wyrazy według potęg $Z - e^{\alpha}$; otrzymamy wtedy właśnie szereg (6) na mocy związków wzajemnych, jakie zachodzą między spółczynnikami szeregu nadlogarytmowego.

Szeregi (6) i (7) są więc identyczne wewnątrz σ. Jeśli teraz obierzemy Z tak, by Lg Z należało do obszaru U, lecz Z — nie, to tym samym osiągamy przedłużenie analityczne funkcji $T(Z)$ wewnątrz obszaru U_1 (z uwzględnieniem cięć D').

W ten sam sposób ustalimy, iż szereg:

$$\alpha^2(\text{Lg}_2\, Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha^3 . (\text{Lg}_2\, Z - e^{\alpha})^2}{2!(\alpha-1)e^{\alpha}} + \ldots..$$

gdzie $$\text{Lg}_2\, Z - e^{\alpha} = \text{Lg}\left\{1 + \frac{\text{Lg}\left(1+\frac{Z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)}{e^{\alpha}}\right\},$$

daje przedłużenie analityczne $T(Z)$ wewnątrz obszaru U_2.

W ogólności:

$$\alpha^p (\mathrm{Lg}^p Z - e^\alpha) - \frac{\alpha^{p+1}(\mathrm{Lg}_p Z - e^\alpha)^2}{2!(\alpha-1)e^\alpha} + \frac{\alpha^{p+2}(2\alpha+1)(\mathrm{Lg}_p Z - e^\alpha)^3}{3!(\alpha^2-1)(\alpha-1)e^{2\alpha}} - \dots \tag{9}$$

da nam przedłużenie $T(Z)$ wewnątrz U_p.

Otóż, według twierdzenia pomocniczego, o którym była mowa w ustępie 5, istnieje taka liczba całkowita dodatnia N, iż $\mathrm{Lg}_N Z$ znajduje się wewnątrz obszaru U, o ile tylko Z należy do D i to niezależnie od położenia punktu Z wewnątrz D. Jeśli więc w szeregu (9) liczba $p = N$, mamy przedłużenie analityczne funkcji $T(Z)$, rozciągające się na cały obszar D'. Wewnątrz obszaru D' $\mathrm{Lg}_p Z$ nie może zmienić się na inną gałęź, nie napotkamy również wewnątrz D' żadnego punktu osobliwego; dla każdej wartości zmiennej zespolonej Z wewnątrz D' gałęź główna $T(Z)$ jest więc określona w sposób jednoznaczny.

Osiągnęliśmy w zupełności określenie gałęzi głównej funkcji nadlogarytmowej. Z natury obszaru D' wynika, że $T(Z)$ nie ma punktów osobliwych poza punktami (ω), o ile ograniczymy się do punktów w odległości skończonej. Teraz łatwo sprawdzić, iż punkty (ω) i punkt ∞ są wszystkie punktami osobliwemi (krytycznemi). W rzeczy samej punkt $\omega_1 = 0$ i punkt ∞ są z pewnością punktami osobliwemi, i to nie tylko dla tej gałęzi, ale i dla każdej innej, gdyż $\mathcal{E}(z)$ jest funkcją całkowitą, i przytem taką funkcją całkowitą, która nie posiada zer w odległości skończonej. Co do innych punkłów (ω), że są punktami osobliwemi, wywnioskować można z równania funkcyjnego, któremu czyni zadość omawiana gałęź $T(Z)$:

$$T(Z) = \alpha^n . T\{\mathrm{Lg}_n Z\}. \tag{10}$$

Jeśli $\mathrm{Lg}_n Z$ jest wewnątrz U, to zależność (10) wynika wprost z samego określenia funkcji $T(Z)$. Jeśli zaś $\mathrm{Lg}_n Z$ nie jest wewnątrz U, to niech p oznacza taką liczbę całkowitą dodatnią, by $\mathrm{Lg}_{n+p} Z$ było wewnątrz U.

W takim razie:

$$T(Z) = \alpha^{n+p} . T\{\mathrm{Lg}_{n+p} Z\}; \tag{11}$$

oznaczmy: $\mathrm{Lg}_n Z = Z'$; w takim razie $\mathrm{Lg}_p Z' = \mathrm{Lg}_{n+p} Z$ znajduje się w U i

(12) $$T(Z') = T\{\mathrm{Lg}_n Z\} = \alpha^p . T\{\mathrm{Lg}_p Z'\} = \alpha^p T\{\mathrm{Lg}_{n+p} Z\};$$

porównywując związki (12) i (11), otrzymamy (10).

Widzimy więc, iż dla gałęzi głównej $T(Z)$, zależność $Z = \mathcal{E}(z)$ jest jednoznacznie odwracalna, t. j. o ile dla każdej wartości Z bierzemy jako odpowiadającą tę wartość z, która wynika z równania $z = T(Z)$, przyczem Z należy do obszaru D'. Przejdźmy teraz do innych gałęzi funkcji $\mathfrak{T}(Z)$.

8. Określenie i nomenklatura ogółu wszystkich gałęzi funkcji nadlogarytmowej.

Dla otrzymania innych gałęzi funkcji nadlogarytmowej będziemy używali tej samej metody przedłużenia analitycznego. co w ustępie poprzednim, ale odrzucimy ograniczenie, polegające na nieprzekraczaniu cięć należących do konturu L obszaru D', jakkolwiek pozostaniemy zawsze wewnątrz D. Na początek, okrążmy, naprzykład punkt ω_1, t. j. punkt 0. Wyjdziemy z punktu $Z = e^\alpha$, i z wartością główną na $z = T(Z)$, która jest tu równa zeru i dojdziemy w sposób ciągły do dowolnego punktu Z obszaru D, zakreśliwszy drogę, która daje się sprowadzić do pętelki (laçet), otaczającej jeden tylko punkt osobliwy ω_1, i do drogi bezpośredniej (chemin direct), łączącej punkt e z rozważanym punktem Z. Wszystkie rozumowania poprzednie stosują się i tutaj, z tą tylko różnicą, że $\mathrm{Lg}\, Z$ staje się $\mathrm{Lg}\, Z \pm \frac{2\pi}{m} i$, zależnie od kierunku obrotu; $\mathrm{Lg}_n Z$ staje się $\mathrm{Lg}_{n-1} \{\mathrm{Lg}\, Z \pm \frac{2\pi}{m} i\}$.

Zwróćmy się teraz do wzoru (10); niech liczba n będzie obrana dostatecznie wielką, by $\mathrm{Lg}_n Z$ znajdował się stale wewnątrz koła U, gdy Z opisuje naszą drogę, otaczającą punkt ω_1. W chwili, gdy przekraczamy podczas obrotu cięcie, wyraz po stronie lewej we wzorze (10) przestaje wyobrażać gałęź główną funkcji $\mathfrak{T}(Z)$ i otrzymujemy wartość należącą do nowej gałęzi, którą oznaczać będziemy $T_1(Z)$ lub odpowiednio $T_{-1}(Z)$, zależnie od kierunku obrotu, gdy tymczasem po stronie prawej wzoru (10) będziemy mieli w dalszym ciągu gałęź główną, tak iż, powróciwszy do punktu wyjścia Z, będziemy mieli:

$$T_1(Z) = \alpha^n T\{\mathrm{Lg}_{n-1}(\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} i)\} = \alpha . T\{\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} i\},$$

Tak samo:

$$T_{-1}(Z) = \alpha\, T\{\mathrm{Lg}\, Z - \frac{2\pi}{m} i\}.$$

Po k obrotach otrzymamy:

$$T_{\pm k}(Z) = \alpha\, T\{\mathrm{Lg}\, Z \pm \frac{2\pi}{m} ki\},$$

lub po prostu:

$$(11) \qquad T_k(Z) = \alpha \,.\, T\{\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\},$$

ale liczba całkowita k może tu być dodatnia i ujemna. Wzór (11) daje nam wszystkie gałęzie, które otrzymać można, wychodząc z gałęzi głównej, przez obrót naokoło ω_1. Wszystkie te gałęzie mają tę wspólną własność, iż nie mają innych punktów osobliwych, prócz punktów $Z = 0$ i $Z = \infty$; wynika to odrazu ze wzoru (11), będącego określeniem gałęzi $T_k(Z)$.

Przejdźmy teraz do gałęzi funkcji $\mathfrak{T}(Z)$, które można otrzymać przez obrót naokoło punktu $\omega_2 = 1$. Otrzymamy w sposób analogiczny wzór, będący określeniem odpowiedniej gałęzi, w postaci:

$$T_{k,\,0}(Z) = \alpha^2 \,.\, T\{\mathrm{Lg}_2\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

Dla tych wszystkich gałęzi jedynemi punktami osobliwemi są trzy punkty: $Z = 1$, $Z = 0$, $Z = \infty$. W ten sam sposób, gałęzie, otrzymane przez obrót naokoło punktu $\omega_3 = a$, są określone przez wzór:

$$T_{k,0,0}(Z) = \alpha^3 \,.\, T\{\mathrm{Lg}_3\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

Jedynemi punktami osobliwemi są tu $Z = \omega_1$, ω_2, ω_3 ∞. Obrót naokoło ω_4 daje:

$$T_{k,0,0,0}(Z) = \alpha^4 \,.\, T\{\mathrm{Lg}_4\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

By we wskaźniku uniknąć szeregu zer, będziemy używali innego sposobu znakowania, pisząc, np. $T_{k/1}(Z)$ zamiast $T_k(Z)$, $T_{k/2}(Z)$ zamiast $T_{k,0}(Z)$, $T_{k/3}(Z)$ zamiast $T_{k,0.0}(Z)$ i t. d.

W wypadku najogólniejszym będziemy mieli:

$$T_{k/p}(Z) = \alpha^p \,.\, T\{\mathrm{Lg}_p Z + \frac{2\pi}{m} ki\},$$

dla oznaczenia gałęzi, którą otrzymujemy, wychodząc z gałęzi głównej i okrążając k razy punkt osobliwy ω_p i ten tylko. W ten sposób otrzymana gałęź niema innych punktów osobliwych, prócz punktów ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, ω_p i ∞. Tak np., $T_{3/10}(Z)$ oznacza gałęź, którą otrzymamy, krążąc trzykrotnie w kierunku dodatnim naokoło punktu ω_{10}.

Zauważmy teraz, że droga zamknięta, okrążająca pewną liczbę punktów (ω) daje nam, jeśli wyjdziemy, jak zawsze, z gałęzi głównej, ten sam wynik, co okrążenie jednego tylko z pośród tych punktów, mianowicie punktu (ω) o wskaźniku najmniejszym. Dla tego też upada ograniczenie tyczące się warunku, by okrążać jeden tylko punkt osobliwy. Tak np., dla otrzymania gałęzi $T_{2/5}(Z)$ powinniśmy, wychodząc z gałęzi głównej, okrążyć dwa razy punkt ω_5, przyczem możemy drogę tak wybrać, by oprócz punktu ω_5 okrążyć jeszcze dowolną liczbę (i nawet nieskończoną) punktów ω_p, byle tylko dla wszystkich tych punktów $p > 5$; nie wpłynie to wcale na otrzymany wynik.

Zauważmy także, że obrót naokoło punktu ∞ daje to samo, co obrót naokoło punktu 0, ze zmianą zwrotu jedynie.

Wychodząc z gałęzi głównej nie ma już możności otrzymania bezpośrednio gałęzi nowych; punkt e^β nie wchodzi w rachubę, gdyż nie da się punkt e^β otoczyć bez okrążenia nieskończonej liczby punktów (ω) i dla wyświetlenia wyniku tego okrążania wystarczy zastosować poprzednią uwagę o najmniejszym wskaźniku.

Ponieważ jednak gałęź $T_{k/p}(Z)$ posiada punkty osobliwe, możemy otrzymać nowe gałęzie wychodząc z $T_{k/p}(Z)$ i okrążając punkty osobliwe ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_p tej gałęzi.

Gałęzie $T_{k/1}(Z)$ nie mogą, oczywiście, dać nic nowego, ale już wychodząc z gałęzi $T_{k/2}(Z)$, przez okrążanie punktu $\omega_1 = 0$, otrzymamy szereg nowych gałęzi, które oznaczymy zapomocą wskaźnika $(k/2, \nu/1)$. Gałęź tę otrzymamy, wychodząc z gałęzi głównej, jeśli najprzód okrążymy k razy punkt ω_2 a następnie ν razy punkt ω_1, przyczem liczby k i ν mogą być dodatnie lub ujemne, zależnie od zwrotu. Mamy więc dla określenia tej gałęzi wzór

$$T_{k/_2, v/_1}(Z) = \alpha^2 \,.\, T\{\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg}\,Z + \frac{2\pi}{m} vi) + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

W podobny sposób rozumując dalej, dojdziemy do gałęzi $T_N(Z)$, w której wskaźnik N ma postać

$N = (k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1)$, tak iż $T_N(Z)$

będzie gałęzią, określoną przez wzór:

$$T_N(Z) = \alpha^p \,.\, T\{\mathrm{Lg}\,[\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg} \ldots \mathrm{Lg} < \mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg}\,Z + \frac{2\pi}{m} k^{(1)} i) + \frac{2\pi}{m} k^{(2)} i > +$$

$$+ \frac{2\pi}{m} k^{(3)} i \ldots) + \frac{2\pi}{m} k i^{(p-1)}] + \frac{2\pi}{m} k i^{(p)}\}.$$

Gałęź tę otrzymamy z gałęzi głównej, otaczając najprzód $k^{(p)}$ razy z rzędu punkt ω_p, następnie okrążymy punkt ω_{p-1} zrzędu $k^{(p-1)}$ razy i t. d...., wreszcie $k^{(2)}$ razy zrzędu naokoło ω_2 i $k^{(1)}$ naokoło ω_1.

Wszystkie te gałęzie są funkcjami jednowartościowemi zmiennej Z wewnątrz D'.

9. Zupełność podanej enumeracji i nomenklatury gałęzi funkcji $\mathfrak{C}(Z)$.

Niech Z oznacza wartość, należącą do obszaru D; w ustępie poprzednim otrzymaliśmy pewien zbiór wartości funkcji odwrotnej $z_N = T_N(Z)$, gdzie N wskaźnik oznacza $(k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1)$, odpowiadający danej wartości zmiennej Z. Zbiór ten, jest przeliczalny, możemy więc go uporządkować w postaci ciągu (A): $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$ Udowodnimy teraz, że te gałęzie zbioru (A) wyczerpują ogół wszystkich wartości funkcji $\mathfrak{C}(Z)$.

Na mocy założenia, mamy $\mathcal{E}(z_k) = Z$, ponieważ z_k należy do (A). Przypuśćmy, iż istnieje jeszcze jakaś wartość z', nie ujęta zbiorem (A), a czyniąca zadość temu samemu warunkowi $\mathcal{E}(z') = Z$, Z równania funkcyjnego, któremu czyni zadość funkcja nadwykładnicza, otrzymujemy

$$\mathcal{E}\left(\frac{z'}{\alpha^n}\right) = \mathrm{Log}'_n\, Z, \tag{13}$$

gdzie po drugiej stronie równości $\mathrm{Log}'_n\, Z$ oznacza pewną, zupełnie określoną wartość funkcji wielowartościowej $\mathrm{Log}_n\, Z$, wartość, którą nie potrzebujemy zresztą bliżej się zajmować. Ponieważ $\mathcal{E}(o) = e^{\alpha}$, i funkcja $E(z)$ jest ciągła, we wzorze (13) możemy wziąść liczbę

całkowitą n dostatecznie wielką, by $\left|\frac{z'}{\alpha^n}\right|$ było tak małe, jak się podoba, a więc tak, by nierówności:

$$(14) \qquad \left|\frac{z'}{\alpha^n}\right| < \varepsilon \text{ i } \left|\mathcal{E}\left(\frac{z'}{\alpha^n}\right) - e^{\alpha}\right| < \eta$$

były spełnione, jakkolwiek małemi byłyby liczby dodatnie ε i η.

Istnieje jedna tylko gałęź funkcji odwrotnej $\mathfrak{T}(Z)$, przyjmująca wartość $= 0$ dla $Z = e^{\alpha}$. Punkt analityczny $Z = e^{\alpha}$, $z = 0$ jest punktem regularnym; istnieje więc koło o środku w punkcie $z = 0$ na płaszczyźnie zmiennej z takie, że wszystkie punkty wewnątrz tego koła należą do gałęzi głównej. Jeśli więc we wzorze (14) wybierzemy liczbę dodatnią ε mniejszą od promienia wspomnianego koła, $\frac{z'}{\alpha^n}$ będzie należeć do gałęzi głównej, a więc, przez odwrócenie zależności (13), otrzymamy:

$$(15) \qquad \frac{z'}{\alpha^n} = T\{\mathrm{Log}'_n Z\}, \text{ t. j. } z' = \alpha^n . T\{\mathrm{Log}'_n Z\}.$$

Zauważymy teraz, że $\alpha^n . T\{\mathrm{Log}'_n (Z)\}$ we wzorze (15) po stronie drugiej, nie jest niczem innem, jak jedną z wartości funkcji odwrotnej z_k, należącą do zbioru (A); aby utożsamić z' z jedną z wartości z_k ciągu (A), należy tylko uwzględnić, którą z gałęzi funkcji $\mathrm{Log}_n Z$ przedstawia wchodząca w skład wzoru (15) gałęź $\mathrm{Log}'_n Z$. Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

10. Uogólnienie zależności funkcyjnej, której czyni zadość funkcja nadlogarytmowa.

Dla wartości rzeczywistych zmiennej Z zachodzi zależność funkcyjna podstawowa:

$$T(a^Z) = a . T(Z),$$

gdzie po obu stronach występuje gałęź główna. Chodzi nam teraz o postać, jaką przyjmuje ta zależność, gdy nie będziemy się ograniczali do gałęzi głównej i do wartości rzeczywistych zmiennej Z. Używając zwykłych znakowań, mamy $\mathcal{E}(z) = Z$, $\mathcal{E}(\alpha z) = a^Z$, a więc, przez odwrócenie $z = T_N(Z)$, $\alpha z = T_{N'}(a^Z)$, tak ostatecznie otrzymujemy

$$T_N(a^Z) = \alpha . T_{N'}(Z),$$

gdzie N i N' zastępują wskaźniki złożone, o których była mowa w ustępie 8, przy enumeracji gałęzi funkcji $\mathfrak{T}(Z)$.

Należy znaleźć związek, między wskaźnikami N i N'; związek ten, jak zobaczymy za chwilę, zależy od położenia punktu Z na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W tym celu podzielmy płaszczyznę zmiennej zespolonej na pasma prostemi równoległemi, jak w ustępie 5. Podporządkujmy liczbę zero pasmu środkowemu, zawierającemu oś liczb rzeczywistych; liczby 1, 2, 3,... i t. d. podporządkujemy kolejno pasmom następnym ponad osią liczb rzeczywistych, a liczby — 1, — 2,... pasmom poniżej tej osi. Niech Z znajduje się w pasmie ν. Wychodząc z wartości $Z = e^{\alpha}$, niech Z opisze drogę C, okrążającą $k^{(p)}$ razy z rzędu punkt krytyczny ω_p, następnie $k^{(p-1)}$ razy punkt $\omega_{p-1}, \ldots,$ wreszcie $k^{(1)}$ razy punkt ω_1 i kończącą się w punkcie Z w paśmie ν. Jeśli teraz w zależności

$$T(a^Z) = \alpha . T(Z),$$

która ma miejsce dla $Z = e^{\alpha}$ i w otoczeniu tego punktu, przedłużymy analitycznie funkcje, stojące po obu stronach równości, po drodze l aż do punktu Z w paśmie ν, to zauważymy, że $T(Z)$ zamieni się na $T_{N'}(Z)$, a $T(a^Z)$ na $T_N(a^Z)$, przyczem na skutek drogi l będziemy mieli:

$$N' = (k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1,\ k^{(p-2)}/p-2, \ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1), \text{ a}$$

$$N = (k^{(p)}/p+1,\ k^{(p-1)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots,\ k^{(1)}/2,\ \nu/1),$$

tak iż otrzymujemy:

$$T_N(a^Z) = T_{N'}(Z).$$

Wzorowi temu można nadać postać $T_N(Z) = \alpha . T_{N'}\{\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m}\nu i\}$,

gdzie N i N' mają te same znaczenia, co poprzednio.

Tak samo znajdziemy:

$$T_\lambda(Z) = \alpha^2 . T_{N'}\{\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m}\nu_1 i) + \frac{2\pi}{m}\nu_2 i\},$$

gdzie

$$N' = (k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1), \text{ a}$$

$$N = (k^{(p)}/p+2,\ k^{(p-1)}/p+1,\ k^{(p-2)}/p, \ldots,\ k^{(1)}/3,\ \nu_2/2,\ \nu_1/1).$$

I tak dalej.

CZĘSC DRUGA.

Określenie pewnej klasy funkcji całkowitych.

11. O funkcji analitycznej $\mathrm{Log}^{(z)}\ \mathcal{E}(z)$.

$\mathrm{Log}\ \mathcal{E}(z)$ może być określona jako funkcja analityczna zmiennej z, pod warunkiem, jak zobaczymy za chwilę, że w $\mathrm{Log}\ \mathcal{E}(z)$ występująca gałęź funkcji logarytmowej była zmienną wraz ze zmienną z, wskutek czego, dla zaznaczenia tego faktu, pisać będziemy $\mathrm{Log}^{(z)}\ \mathcal{E}(z)$. Określenie nasze będzie następujące: dla $z=0$ i w otoczeniu tego punktu weźmiemy gałęź główną $\mathrm{Lg}\ \mathcal{E}(z)$, tak iż $\mathrm{Log}^{(0)}\ \mathcal{E}(o) = e^{\alpha}$. W ten sposób, w otoczeniu punktu $z = o$ możemy określić element funkcji analitycznej, gdyż w punkcie $z = o$ znana jest wartość funkcji $\mathrm{Lg}\ \mathcal{E}(z)$ i jej kolejnych pochodnych wszystkich rzędów. Ponieważ funkcja określona przez ten element jest, jak wiemy, funkcją całkowitą, więc odpowiadający temu elementowi szereg jest zbieżny w całej płaszczyźnie i identyczny z rozwinięciem na szereg funkcji $\mathcal{E}\left(\frac{z}{a}\right)$. Mamy więc

$$\mathrm{Log}^{(z)}\ \mathcal{E}(z) = \mathcal{E}\left(\frac{z}{a}\right). \tag{1}$$

Oznaczmy $\mathcal{E}(z)$ przez Z. Wtedy z musi być jedną z wartości $T_{N'}(Z)$, przyczem niech będzie

$$N' = (\nu^{(n)}/n,\ \nu^{(n-1)}/n-1, \ldots,\ \nu^{(2)}/2,\ \nu^{(1)}/1);$$

w takim razie, jak wiemy z ustępu 10,

$$N = (\nu^{(n)}/n-1,\ \nu^{(n-1)}/n-2, \ldots,\ \nu^{(3)}/2,\ \nu^{(2)}/1),$$

a gałęź $\mathrm{Log}^{(z)}\ \mathcal{E}(z)$ jest wtedy właśnie równa

$$\mathrm{Lg}\ \mathcal{E}(z) + \frac{2\pi}{m} . \nu^{(1)} . i.$$

W ten sam sposób traktowalibyśmy funkcje

$$\mathrm{Log}_2^{(z)}\ \mathcal{E}(z),\ \mathrm{Log}_3^{(z)}\ \mathcal{E}(z),\ \text{i t. d.}$$

12. Określenie pewnej klasy funkcji całkowitych. Warunek dostateczny przynależności funkcji do tej klasy.

Zajmiemy się teraz pewnem twierdzeniem teorji funkcji ana-

litycznych ogólniejszej natury; tem nie mniej w rozważaniach naszych będziemy posługiwali się własnościami funkcji $\mathfrak{C}(Z)$. Niech $\Theta(\zeta)$ będzie funkcją daną; utwórzmy ciąg funkcji $\Theta(\zeta)$, $\Theta_1(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta), \ldots, \Theta_n(\zeta), \ldots$, przyczem $\Theta_1(\zeta) = \mathrm{Log}^{(\zeta)_1}\Theta(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta) = \mathrm{Log}^{(\zeta)_2}\Theta_1(\zeta), \ldots, \Theta_n(\zeta) = \mathrm{Log}^{(\zeta)_n}\Theta_{n-1}(\zeta) \ldots$. Funkcję $\Theta(\zeta)$ zaliczymy do klasy K wtedy i tylko wtedy, jeśli wszystkie funkcje ciągu nieskończonego $\Theta(\zeta)$, $\Theta_1(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta), \ldots, \Theta_n(\zeta), \ldots$ są funkcjami całkowitemi. Należy jeszcze określić ściśle, co oznaczają symbole $\mathrm{Log}^{(\zeta_1)}\Theta(\zeta)$, $\mathrm{Log}^{(\zeta_2)}\Theta(\zeta)$ i t. d. Uczynimy to podobnie, jak w ustępie 11. Niech ζ_1 oznacza liczbę, spełniającą równanie $\Theta(\zeta_1) = b$, gdzie $b > e^\beta$ i rzeczywiste. Dla $\zeta = \zeta_1$, przyjmiemy $\Theta_1(\zeta_1) = \mathrm{Lg}\, b$, $\Theta_2(\zeta_1) = \mathrm{Lg}_2\, b, \ldots, \Theta_n(\zeta_1) = \mathrm{Lg}_n\, b, \ldots$; wszystkie te liczby $\mathrm{Lg}_n\, b$ są rzeczywiste, ponieważ $b > e^\beta$. Dla $\zeta = \zeta_2$ i w otoczeniu dostatecznie małem tego punktu bierzemy $\mathrm{Log}^{(\zeta)}$ równe Lg; funkcja $\Theta_1(\zeta)$ ma wartość $\mathrm{Lg}\, b$ w punkcie ζ_1; pochodne wszystkich rzędów tej funkcji mają też wartości w zupełności określone i rzeczywiste dla $\zeta = \zeta_1$; widzimy więc, iż odpowiadający element funkcji analitycznej, mianowicie szereg potęgowy rozwinięcia $\Theta_1(\zeta)$ jest w zupełności przez nasze założenia określony; ponieważ zaś zakładamy oprócz tego, że $\Theta_1(\zeta)$ jest funkcją całkowitą, jest ta funkcja określona przez otrzymany szereg w całej płaszczyźnie zmiennej ζ. W ten sam sposób określimy $\Theta_2(\zeta)$ $\Theta_3(\zeta)$ i t. d. Te wyjaśnienia konieczne były dla wyjaśnienia znaczenia symbolu Log we wzorach, określających $\Theta_1(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta)$, i t. d. Widzimy, iż symbol Log oznacza wartość, która może być wartością główną, np., jeśli ζ należy do otoczenia punktu ζ_1, ale może być jakąkolwiek wartością inną, w zależności od ζ.

Czy klasa K nie jest pusta? By funkcja $\Theta_2(\zeta)$ była funkcją całkowitą, trzeba i wystarcza, by $\Theta(\zeta) = a^{\Theta_1(\zeta)} = e^{m\Theta_1(\zeta)}$; by, oprócz tego, $\Theta_2(\zeta)$ było funkcją całkowitą, musimy wziąść $\Theta(\zeta) = a_2[\Theta_2(\zeta)]$ i t. d. Nie jest wcale widocznem, a priori, że można uczynić zadość warunkowi, by wszystkie funkcje $\Theta_n(\zeta)$, jakąkolwiek byłaby liczba całkowita dodatnia n, były funkcjami całkowitemi.

Otóż jest to w istocie możliwe. Wystarczy wziąść $\Theta(\zeta) = \mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, gdzie $\mathcal{E}(z)$ oznacza funkcję nadwykładniczą, a $H(\zeta)$ dowolną funkcję całkowitą zmiennej ζ. W rzeczy samej, wtedy

$$\Theta_1(\zeta) = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{a} H(\zeta)\right\}; \quad \Theta_2(\zeta) = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{a^2} H(\zeta)\right\}, \ldots \ldots,$$

$\Theta_n(\zeta) = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{\alpha^n} H(\zeta)\right\}, \ldots,$ i wszystkie te fuunkcje są funkcjami całkowitemi.

Klasa K nie jest więc pusta.

13. Warunek konieczny i dostateczny przynależności funkcji do klasy K.

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne, iż każda funkcja, należąca do klasy K jest kształtu $\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, gdzie $H(\zeta)$ jest funkcją całkowitą.

Przypuśćmy więc, iż $\Theta(\zeta)$ należy do klasy K. Utwórzmy funkcję $H(\zeta)$ przy pomocy funkcji nadlogarytmowej i funkcji $\Theta(\zeta)$, przyczem określimy ją w otoczeniu punktu $\zeta = \zeta_1$, (patrz 12); mianowicie w punkcie ζ_1 i w otoczeniu punktu ζ_1 funkcja $H(\zeta)$ będzie określona przez $T\{\Theta(\zeta)\}$; mamy w ten sposób element funkcji analitycznej, określony przez pewien szereg, zbieżny wewnątrz pewnego koła o środku w punkcie ζ_1. Określmy funkcję $H(\zeta)$ w całym obszarze istnienia, jako funkcję analityczną, którą otrzymamy przez przedłużenie analityczne tylko co wspomnianego elementu; jasna rzecz, $T\{\Theta(\zeta)\}$ zmieni się na $T_N\{\Theta(\zeta)\}$, gdzie wskaźnik gałęziowy N zależeć będzie od ζ i od drogi, wzdłuż której uskutecznialiśmy przedłużenie od ζ_1 do ζ, przynajmniej od tej drogi zależeć by mógł. Lecz w danym razie droga wpływu mieć nie będzie; funkcja $H(\zeta)$ jest funkcją jednowartościową. W rzeczy samej, dla $\zeta = \zeta_1$, mamy $\Theta(\zeta_1) = b$ i $H(\zeta_1) = T(b)$, czyli wartość rzeczywistą. Począwszy od punktu $\zeta = \zeta_1$, wyobraźmy sobie jakąkolwiek drogę l po której dojść można do punktu ζ. — Mamy $H(\zeta) = \mathfrak{C}(Z)$, gdzie $Z = \Theta(\zeta) = a_n\{\Theta_n(\zeta)\}$, ponieważ $\Theta(\zeta)$ należy do klasy K, tak, iż $H(\zeta) = \mathfrak{C}\{a_n[\Theta_n(\zeta)]\}$; gdy ζ opisuje kontur zamknięty, jakikolwiek zresztą, $\Theta_n(\zeta)$ opisuje także kontnr zamknięty w odległości skończonej, a więc $Z = a_n\{\Theta_n(\zeta)\}$ opisze kontur zamknięty, który nie otacza żadnego z punktów $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, (patrz 6). Ponieważ w poprzedniem rozumowaniu n jest liczbą dowolną, więc możemy poprzedni wynik zastosować do wszystkich punktów zbiorn (ω); tak więc, gdy ζ opisuje drogę zamkniętą l, $Z = \Theta(\zeta)$ opisze też drogę zamkniętą l', nie otaczającą żadnego z punktów (ω). Nie można ztąd wnioskować, oczywiście, iż l' nie przecina cięć konturu L, ograniczającego obszar D', tak iż funkcja $H(\zeta)$, identyczna z funkcją $T\{\Theta(\zeta)\}$ w otoczeniu punktu $\zeta = \zeta_1$, staje się równą funkcji $T_N\{\Theta(\zeta)\}$ przy odpowiedniej wartości ζ.

Tem nie mniej twierdzić możemy, że funkcja $H(\zeta)$ jest funkcją jednowartościową w zakresie istnienia Pozostaje zbadać, jakie okoliczności zachodzą, gdy droga l' którą opisuje Z przechodzi przez którykolwiek z punktów (ω). Zauważmy przedewszystkiem, iż przez punkt ω_1 kontur l' przejść nie może, gdyż równanie $\Theta(\zeta)=\omega_1=0$ nie ma pierwiastków. Zbadajmy teraz, co będzie miało miejsce, gdy od punktu ζ_1 począwszy, zbliżać się będziemy do punktu ζ_2, przyczem $\Theta(\zeta_2)=\omega_2=1$; drodze l od ζ_1 do ζ_2 odpowiada w płaszczyźnie zmiennej Z droga l' od punktu b do punktu ω_2. Twierdzę, iż droga l' musi przeciąć kontur L na odcinku między kołami C i C_1. W rzeczy samej, z $\Theta(\zeta_2)=1$ wynika, iż $\Theta_1(\zeta_2)= =\frac{2\pi}{m}ki$, przyczem $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ *ale wartość liczbowa* $k=0$ *jest wykluczona (K).* W otoczeniu punktu ζ_1 mamy

$$H(\zeta)=T(Z)=a\,T(Z'), \tag{2}$$

gdzie $Z=\Theta(\zeta)$, $Z'=\mathrm{Lg}^{(\zeta)}\,\Theta(\zeta)=\mathrm{Lg}^{(\zeta)}\,Z$, przyczem tu $\mathrm{Lg}^{(\zeta)}$ oznacza Lg. Gdy teraz ζ opisuje drogę l, a Z drogę l', we wzorze (2) współczynnik przy i w Z' zmienia się od 0 do $\frac{2\pi}{m}k$, (przyczem $k\neq 0$). Dowodzi to, iż droga l', którą nakreślił punkt Z w płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z, musiała przeciąć przynajmniej raz cięcie na konturze L, i to na odcinku między kołami C i C_1; oczywiście, droga l' może oprócz tego przeciąć kontur L i w innych miejscach. Gdy więc, przedłużając funkcję $H(\zeta)$ od ζ_1 do ζ_2 wzdłuż drogi l, dojdziemy do punktu ζ_2, to otrzymamy jednocześnie zmianę gałęzi głównej $T(Z)$ na gałęź $T_N(Z)$, przyczem wskaźnik gałęziowy N ma wartość:

$$N=(k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots, k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1),$$

przyczem $k^{(p)}, k^{(p-1)}, \ldots, k^{(2)}$ mogą być dowolnemi liczbami ciągu $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$, gdy tymczasem $k^{(1)}=k\neq 0$.

Tak więc w otoczeniu punktu ζ_2 mamy: $H(\zeta)=T_N\{\Theta(\zeta)\}$; lecz dla każdej gałęzi funkcji nadlogarytmowej o wskaźniku N, w którym $k^{(1)}\neq 0$, punkt $Z=1$ jest punktem regularnym. W punkcie $a=\zeta_2$ funkcja jest regularna i ma wartość w zupełności określoną $H(\zeta_2)=T_N(1)$.

Tak samo udowodnimy, że funkcja $H(\zeta)$ jest regularna w punkcie ζ_3, gdzie ζ_3 spełnia warunek $\Theta(\zeta_3)=\omega_3$. Przedłużając

funkcję $H(\zeta)$ od ζ_1 do ζ_3, przekonamy się, że funkcja $\Theta_2(\zeta)$ w otoczeniu punktu ζ_3 osiągnie wartość, którą można przedstawić w postaci: $\operatorname{Lg}[\operatorname{Lg}\Theta(\zeta)+\frac{2\pi}{m}\nu_1 i]+\frac{2\pi}{m}\nu_2$, gdzie liczby ν_1 i ν_2 nie mogą jednocześnie mieć wartości zerowe, gdyż inaczej w punkcie ζ_3 mielibyśmy $\Theta_2(\zeta_3)=0$, co jest niemożliwe. Przedłużając więc $H(\zeta)$ od ζ_1 do ζ_3 wzdłuż drogi l, dojdziemy do punku ζ_3 z wartością $T'_N(Z)$ funkcji nadlogarytmowej, przyczem

$$N=(k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1,\ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1),$$

przyczem $k^{(2)}=\nu_2$, $k^{(1)}=\nu_1$, tak iż $k^{(2)}$ i $k^{)}$ nie mogą być jednocześnie zerami. W otoczeniu więc punktu ζ_3 mamy $H(\zeta)=T_N\{\Theta(\zeta)\}$, a w samym punkcie ζ_3 mamy $H(\zeta_3)=T_N(\omega_3)$. Regularność funkcji $H(\zeta)$ w punkcie ζ_3 wynika ztąd, iż punkt ω_3 jest punktem regularnym dla omawianej gałęzi $T_N(Z)$ funkcji nadlogarytmowej. To samo rozumowanie stosuje się do każdego punktu ζ_n, spełniającego równanie $\Theta(\zeta)=\omega_n$. Dochodząc do punktu ζ_n, otrzymamy wartość funkcji $H(\zeta)$, która — przez pośrednictwo funkcji nadlogarytmowej — wyraża się gałęzią o wskaźniku N, przyczem wskaźnik ten jest tego rodzaju, iż dla gałęzi $T_N(Z)$ punkt $Z=\omega_n$ jest punktem regularnym i $H(\zeta_n)=T_N(\omega_n)$.

Przejdźmy teraz do punktów ζ_β, spełniających warunek $\Theta(\zeta_\beta)=e^\beta$. Punkty te są odosobnione. Ztąd wnioskujemy, iż zakres istnienia funkcji $H(\zeta)$ obejmuje z pewnością całą płaszczyznę zmiennej ζ. — Ponieważ funkcja $H(\zeta)$ jest jednowartościowa, więc punkty ζ_β, o ile nie są punktami regularnymi, mogą być tylko punktami istotnie osobliwymi lub biegunami. Gdyby punkt ζ_β był więc punktem osobliwym dla $H(\zeta)$, to musiałby być[1]) punktem istotnie osobliwym dla funkcji $\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, co jest niemożliwe, bo jak łatwo sprawdzić, funkcja $\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$ jest funkcją całkowitą, t. j. regularną w całej płaszczyźnie. Tak więc $H(\zeta)$ jest funkcją całkowitą. Ponieważ $H(\zeta)=\mathcal{C}\{\Theta(\zeta)\}$, wnioskujemy, iż $\Theta(\zeta)=\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, co trzeba było udowodnić.

---

[1]) Dowód tego twierdzenia jest bardzo łatwy i pomieszczony będzie w dodatku.

DODATEK.

Dowód twierdzenia pomocniczego.

1. Wysłowienie twierdzenia pomocniczego i znakowanie.

Mamy zamiar udowodnić w tym dodatku twierdzenie pomocnicze, którem posługiwaliśmy się w ciągu niniejszej pracy. Twierdzenie to jest następujące: niech M oznacza dowolny punkt obszaru D; w takim razie $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^{\alpha}$, przyczem zbieżność ma miejsce jednostajnie.

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Punkt M odpowiada wartości $z = x + iy$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej; punkt M_{-n} odpowiada w ten sam sposób punktowi $z_{-n} = x_{-n} + iy_{-n}$, przyczem $z_{-n} = \mathrm{Lg}_n\, z$, Lg_n ma to samo znaczenie, jakie nadaliśmy temu symbolowi poprzednio. Wprowadźmy jeszcze spółrzędne biegunowe r_{-n} i Θ_{-n} punktu M_{-n}, tak iż $x_{-n} = r_{-n} \cos \Theta_{-n}$, $y_{-n} = r_{-n} \sin \Theta_{-n}$. Twierdzenie nasze może więc wysłowić w sposób następujący: dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, istnieje liczba N, niezależna od położenia punktu M wewnątrz D, taka, iż dla każdego $n > N$, zachodzą nierówności

$$|\Theta_{-n}| < \varepsilon, \quad |x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon$$

2. Dowód twierdzenia pomocniczego w wypadku, gdy punkt M znajduje się w obszarze, stanowiącym pewną część obszaru D.

Dowód twierdzenia pomocniczego podzielimy na dwie części. Nakreślmy na płaszczyźnie zmiennych x, y prostą $x = e^{\beta} + \varepsilon_0$; prosta ta podzieli płaszczyznę zmiennej zespolonej z na dwie półpłaszczyzny Q_1 i Q_2. W tym ustępie ograniczymy się do punktów M, należących do Q_2; w takim razie $x \geqslant e^{\beta} + \varepsilon_0$, gdzie $\varepsilon_0 > 0$, i może być liczbą tak małą, jak się podoba, w każdym razie mniejsza od $\dfrac{e^{\alpha} - e^{\beta}}{2}$.

Zauważmy przedewszystkiem, iż jeśli M należy do obszaru Q_2, to punkty M_{-1}, $M_{-2}, \ldots$ i wszystkie następne należą do tegoż obszaru Q_2.

W rzeczy samej, $x_{-1} = \mathrm{Lg}\, r \geqslant \mathrm{Lg}\,(e^{\beta} + \varepsilon_0) > e^{\beta} + \varepsilon_0$; tak więc x_{-1} należy do Q_2 i t. d.

Możemy przyjąć, bez zmniejszenia ogólności dowodu, iż $\Theta \geqslant 0$; w takim razie będzie zawsze $\Theta_{-n} \geqslant 0$, przyczem, o ile M należy do Q_2, to również $\Theta_{-n} < \frac{\pi}{2}$.

Podamy teraz szereg prostych zależności, którymi posługiwać się będziemy w toku rozumowania.

Z równości:

$$x_{-(n+1)} = \operatorname{Lg} r_{-n}, \tag{1}$$

wynikają następujące nierówności:

$$x_{-(n+1)} \geqslant \operatorname{Lg} x_{-n}, \tag{2}$$

$$r_{-(n+1)} \geqslant \operatorname{Lg} r_{-n}, \tag{2'}$$

przyczem równość zachodzi tylko wtedy, gdy punkt M, należąc do Q_2, leży na osi liczb rzeczywistych. Dalej, mamy:

$$m y_{-(n+1)} = \Theta_{-n}, \quad \text{gdzie } m = a e^{-a} \tag{3}$$

Wreszcie z poprzednich otrzymamy

$$\frac{e^{\alpha}}{\alpha r_{-(n+1)}} < \frac{\Theta_{-(n+1)}}{\Theta_{-n}} < \frac{e^{\alpha}}{\alpha x_{-(n+1)}} \tag{4}$$

Ze wzorów (1), (2), (3) i (4) wysnujemy teraz szereg wniosków.

1°. Weźmy pod uwagę dwa ciągi:

$$r,\ r_{-1},\ r_{-2}, \ldots,\ r_{-n}, \ldots \tag{5}$$

$$x,\ x_{-n},\ x_{-2}, \ldots,\ x_{-n}, \ldots \tag{6}$$

Na mocy (1) liczby drugiego ciągu są logarytmami liczb pierwszego ciągu. Jeśli więc jeden z tych ciągów dąży do granicy e^{α}, to i drugi posiada tę samą granicę; tak samo oba ciągi są jednocześnie rosnące lub jednocześnie malejące, o ile to ma miejsce dla jednego z nich.

2°. Jeśli $\Theta = 0$, ciągi (5) i (6) są identyczne. Ciąg jest rosnący, o ile $x < e^{\alpha}$ (lecz $x > e^{\beta} + \varepsilon_0$); ciąg jest malejący; jeśli $x > e^{\alpha}$; jeśli $x = e^{\alpha}$, wszystkie wyrazy ciągu są sobie równe. W każdym z tych trzech przypadków granica jest e. Niech N oznacza większą z dwóch liczb

$$E\left\{\lg_{\alpha} \frac{T(R)}{T(e^{\alpha} + \varepsilon)}\right\} + 1 \quad \text{i} \quad E\left\{\lg_{\alpha} \frac{T(e^{\beta} + \varepsilon_0)}{T(e^{\alpha} - \varepsilon)}\right\} + 1,$$

gdzie R jest promieniem koła C, a $E(z)$ oznacza największą liczbę całkowitą, zawartą w z. O ile $n > N$ i M należy zarazem do D i Q_2, to

$$|x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon.$$

Tak więc we wszystkich rozważaniach następnych możemy przyjąć, iż $\Theta > 0$.

3⁰. Jeśli w ciągu (6) mamy $x_{-k} \geqslant e^{\alpha}$, to wszystkie następne wyrazy spełniają ten sam warunek, t. j. $x_{-(k+l)} > e^{\alpha}$, (dla $l > 0$). To samo się stosuje do ciągu (5). To wynika z (2) i (2').

4⁰. Jeśli w (6) mamy $x_{-k} < e^{\alpha}$, to $x_{-(k+1)} > x_{-k}$; tak samo nierówność $r_{-k} < e^{\alpha}$ pociąga nierówność $r_{-(k+1)} > r_{-k}$. Wynika to też z (2) i (2').

5⁰. Jeśli założymy, że wszystkie wyrazy ciągów (5), a więc i (6) są mniejsze od e^{α}, to na zasadzie poprzedniego ciągi te są rosnące, i jak łatwo udowodnić, dążą do granicy e^{α}. W rzeczy samej, połóżmy $x < e^{\alpha}$; wtedy

$$x_{-1} = \mathrm{Lg}\, r \geqslant \mathrm{Lg}\, x, \quad \text{czyli } x_{-1} > p_1, \quad \text{gdzie } p_1 = \mathrm{Lg}\, x;$$

$$x_{-2} = \mathrm{Lg}\, r_{-1} > \mathrm{Lg}\, x_{-1} > \mathrm{Lg}\, p_1, \text{ czyli } x_{-2} > p_2, \text{ gdzie } p_2 = \mathrm{Lg}\, p_1;$$

. . . .

$$x_{-(l+1)} = \mathrm{Lg}\, r_{-l} > \mathrm{Lg}\, x_{-l} > \mathrm{Lg}\, p_l, \text{ czyli } x_{-(l+1)} > p_l, \text{ gdzie } p_l = \mathrm{Lg}\, p_{l-1};$$

. . . .

Lecz $\lim\limits_{l=\infty} p_l = e^{\alpha}$, a jednocześnie $p_l < x_{-(l+1)} < e^{\alpha}$; ztąd wynika, iż $\lim\limits_{n=\infty} x_{-n} = e^{\alpha}$.

6⁰. Tak więc, albo wszystkie wyrazy ciągów (5) i (6) są mniejsze od e^{α}, i wtedy ciągi zmierzają do granicy e, albo też, zacząwszy od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są większe od e^{α}. Połóżmy $\nu_0 = E\left\{\lg_{\alpha} \dfrac{T(e^{\beta} + \varepsilon_0)}{T(e^{\alpha} - \varepsilon)}\right\} + 1$; jeśli $n > \nu_0$, to z pewnością $x_{-n} > e^{\alpha} - \varepsilon$, gdyż ta nierówność jest spełniona w obu wymienionych przypadkach, które wyczerpują wszystkie możliwości.

7⁰. Weźmy teraz pod uwagę kąty biegunowe Θ_{-k}; zacząwszy od pewnego miejsca stanowią one ciąg malejący. W rzeczy samej, na mocy (4), wystarczy, by $x_{-(n+1)} > \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha}$, bo wtedy $\dfrac{\Theta_{-(n+1)}}{\Theta_{-n}}$ [mniejsze

jest od jedności. Jeśli $n > \nu_0$ i jeśli $\varepsilon < \frac{e^{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)}{\sqrt{\alpha}}$, to

$\frac{\Theta_{-(n+1)}}{\Theta_{-n}} < \frac{e^{\alpha}}{\alpha x_{-(n+1)}} \leqslant k_0 < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1$, gdzie $k_0 = \frac{e^{\alpha}}{\alpha(e^{\alpha}-\varepsilon)} < 1$; ponieważ to się stosuje do każdego $n > \nu_0$, mamy, postępując w tenże sposób kolejno

$$\Theta_{-(n+l)} \leqslant k_0^l \cdot \Theta_{-n} < k_0^l \frac{\pi}{2}; \text{ (dla } l > 0).$$

Jeśli więc $l > E \left| \frac{\lg \frac{2\varepsilon}{\pi}}{\lg k_0} \right|$, to $\Theta_{-(n+l)} < \varepsilon$.

Połóżmy więc $\nu_1 = \nu_0 + E \left| \frac{\lg \frac{2\varepsilon}{\pi}}{\lg k_0} \right| + 1$.

Udowodniliśmy więc, iż skoro tylko $n > \nu_1$, to niezawodnie

$$0 < \Theta_{-n} < \varepsilon.$$

Biorąc pod uwagę, cośmy dotąd otrzymali, widzimy iż dowód możemy uważać za osiągnięty w przypadku, gdy wszystkie wyrazy ciągu (5) i (6) są $< e^{\alpha}$.

8°. Pozostaje do zbadania przypadek, gdy od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągów (5) i (6) są większe od e^{α}.

Przypuśćmy, iż $n > \nu_0$ i że oprócz tego $x_{-(n+1)} \leqslant x_{-n}$; w takim razie, twierdzę, mamy także takąż nierówność $x_{-(n+l+1)} < x_{-(n+l)}$, (dla $l > 0$), dla następnych kolejnych wyrazów. W rzeczy samej:

$$x_{-(n+2)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(n+1)} + \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}},$$

$x_{-(n+1)} = \mathrm{Lg}\, x_{-n} + \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-n}}$; lecz $x_{-(n+1)} \leqslant x_{-n}$ pociąga

$\mathrm{Lg}\, x_{-(n+1)} \leqslant \mathrm{Lg}\, x_{-n}$; tak samo $n > \nu_0$ pociąga $\mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}} <$ $\mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-n}}$; dodając do siebie stronami tylko co napisane nierówności, otrzymamy $x_{-(n+2)} < x_{-(n+1)}$; tak samo $x_{-(n+3)} < x_{-(n+2)}$ i t. d. Ten sam dowód dla ciągu (6).

9°. Poprzednio otrzymany wynik wysłowić można w sposób następujący: w rozpatrywanym przypadku ciągi (5) i (6) albo są stale rosnące, albo zacząwszy od pewnego miejsca stale maleją. Zobaczymy zaraz, iż pierwsze z tych dwóch przypuszczeń jest niemożliwe, t. j. że ciągi nasze nie mogą być stale rosnącemi; gdyby bowiem było $x_{-(n+1)} > x_{-n}$ dla każdego n począwszy od pewnego miejsca, to nasz ciąg albo posiadałby granicę $\lambda > e^{\alpha}$, albo też rósł nieograniczenie, tak iż $\lim\limits_{n=\infty} x_{-n} = \infty$. Lecz ani jedno ani drugie nie może mieć miejsca, gdyż, w pierwszym przypadku, λ musiałoby być liczbą, czyniącą zadość równaniu $\lambda = \mathrm{Lg}\, \lambda$, jak to widać, przechodząc do granicy w równości $x_{-(n+1)} = \mathrm{Lg}\, x_{-n} + \mathrm{Lg} \cos \Theta_{-n}$. Z drugiej strony, $x_{-(k+1)} > x_{-k}$ pociąga:

$$0 < x_{-k} - \mathrm{Lg}\, x_{-k} < \mathrm{Lg} \frac{1}{\mathrm{Cos}\, \Theta_{-k}},$$

co jest sprzeczne z przypuszczeniem, iż liczby ciągu x_{-k} nie są ograniczone od góry.

Tak więc wyrazy ciągów (5) i (6) począwszy od pewnego miejsca stale maleją; ale w takim razie posiadają granicę, która to granica nie może być różną od e^{α}, jako spełniająca równanie $\lambda = \mathrm{Lg}\, \lambda$. Tak więc istnienie granicy i w tym przypadku zostało udowodnione. Pozostaje ustalić jednostajną zbieżność.

10°. Nierówność $x_{-(k+1)} > x_{-k}$ pociąga za sobą nierówności $x_{-k} - \mathrm{Lg}\, x_{-k} < \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-k}}$ i $x_{-(k+1)} - \mathrm{Lg}\, x_{-(k+1)} < \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-k}}$; niezależnie od tego, czy $x_{-k} < e^{\alpha}$, czy też $x_{-k} < e^{\alpha}$, druga z tych nierówności będzie spełniona, o ile tylko $x_{-(k+1)} > e^{\alpha}$.

Ztąd można otrzymać następujący wniosek: istnieje liczba ν_2, posiadająca tę własność, iż w ciągu (5) dla $n \geqslant \nu_2$, $|x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon$, o ile wszystkie wyrazy rosną aż do wyrazu x_{-p}, gdzie $p \geqslant \nu_2$.

Liczbę ν_2 otrzymamy w sposób następujący: niech ν' oznacza liczbę taką, że $n \geqslant \nu'$ pociąga $\mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-n}} < \eta$, gdzie liczba η jest w ten sposób dobrana, by warunki

$$\xi > e^{\alpha} \quad \text{i} \quad \xi - \mathrm{Lg}\, \xi < \eta$$

pociągały

$$\xi - e^{\alpha} < \varepsilon;$$

łatwo sprawdzić, iż taka liczba ν' istnieje; liczbę ν_2 wybieramy

tak, by była równą większej z pomiędzy dwóch liczb $\nu' + 1$ i ν_0; ta ostatnia ma znaczenie, ustalone poprzednio.

By uzasadnić nasze twierdzenie, powróćmy do ciągu (5). Niech x_{-k} oznacza ostatni wyraz tego ciągu mniejszy od e^{α}, tak iż już $x_{-(k+1)} > e^{\alpha}$; przypuściliśmy, iż wyrazy ciągu (5) rosną aż do x_{-p}, tak iż jeszcze $x_{-(p-1)} < x_{-p}$, lecz już $x_{-p} > x_{-(p+1)}$, począwszy od tego miejsca, jak wiemy, wyrazy stale maleją; oczywiście $p > k$. Podzielmy wartości $n \geqslant \nu_2$ na trzy grupy, mianowicie: 1) $\nu_2 \leqslant n \leqslant k$; 2) $k < n \leqslant p$; 3) $n > p$; pierwsza grupa może nie istnieć, druga zawiera przynajmniej jedną liczbę, ponieważ przypuściliśmy, iż $p \geqslant \nu_2$; trzecia grupa obejmuje wszystkie pozostałe wartości n.

Udowodnimy słuszność nierówności

$$|x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon,$$

rozpatrując po kolei wartości n pierwszej, drugiej i trzeciej grupy

Niech więc $\nu_2 \leqslant n \leqslant k$; ponieważ $\nu_2 \geqslant \nu_0$, więc $n \geqslant \nu_0$ a więc, dla tych wartości n, na mocy poprzednich rozważań

$$0 < e^{\alpha} - x_{-n} < \varepsilon,$$

jak należało udowodnić.

Niech teraz $k < n \leqslant p$; w takim razie

$$0 < x_{-n} - \operatorname{Lg} x_{-n} < \operatorname{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-(p-1)}} < \eta,$$

ponieważ $n > \nu_2$ i $p - 1 \geqslant \nu'$, a więc

$$0 < x_{-n} - e^{\alpha} < \varepsilon,$$

co jest równoważne z $|x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon$ w danym przypadku.

Niech wreszcie $n > p$; w takim razie

$$e^{\alpha} < x_{-n} < x_{-p}, \quad \text{a więc} \quad 0 < x_{-n} - e^{\alpha} < x_{-p} - e^{\alpha} < \varepsilon.$$

Osiągnęliśmy więc pożądany wynik.

11⁰. Pozostaje nam udowodnić zbieżność jednostajną ciągu (5) ku granicy e^{α}. w przypadku nieobjętym poprzedniem rozumowaniem, t. j. gdy w ciągu (5) wyrazy zaczynają maleć począwszy od wyrazu o wskaźniku $p < \nu_2$,

Niech ν_3 oznacza liczbę, spełniającą warunek $\nu_3 \geqslant \nu_2$ i taką, że $0 < \Theta_{-n} < \varepsilon' = \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha}\, \varepsilon$ jak tylko $n > \nu_3$; wiemy, że taka liczba ν_3 istnieje.

Weźmy pod uwagę zależności następujące:

$$x_{-(\nu_3+l+1)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(\nu_3+l)} + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(\nu_3+l)}},$$

dla $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i zastosujmy do nich nierówność:

$$\mathrm{Lg}\,(A + B) < \mathrm{Lg}\, A + B,$$

która sprawdza się dla $A > \frac{e^\alpha}{\alpha}$ i $B > 0$; wszystkie liczby $x_{-(\nu_3+l)}$ spełniają nierówność $x_{-(\nu_3+l)} > \frac{e^\alpha}{\alpha}$, gdyż ciąg nasz jest malejący, co może mieć miejsce, gdy wyrazy są $\geqslant e^\alpha$ i tylko wtedy. Otrzymamy:

$$x_{-(n+2)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(n+1)} + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}} < \mathrm{Lg}_2 x_{-n} + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-n}} + \\ + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}},$$

$$x_{-(n+3)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(n+2)} + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+2)}} < \mathrm{Lg}_3\, x_{-n} + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-n}} + \\ + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}} + \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+2)}},$$

i t. d. Wreszcie mamy:

$$x_{-(n+l)} < \mathrm{Lg}_l\, x_{-n} + \sum_{i=0}^{i=l-1} \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+i)}}; \quad \text{liczba } n \geqslant \nu_3.$$

Wprowadźmy teraz liczbę

$$l_0 = E\left\{\lg_\alpha \frac{T(R)}{T\left(e^\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)}\right\} + 1;$$

jeśli $l \geqslant l_0$, to zachodzi nierówność

$$e^\alpha < \mathrm{Lg}_l\, x_{-n} < e^\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ gdzie } n \geqslant \nu_3.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\Theta_{-n} < \varepsilon' < \varepsilon$, to zasadzie poprzedniego $\Theta_{-(n+1)} < k_0 \Theta_{-n}$, $\Theta_{-(n+2)} < k_0^2 \cdot \Theta_{-n}, \ldots, \Theta_{-(n+i)} < k_0^i \cdot \Theta_{-n} < k_0^i \cdot \varepsilon'$, dla $i = 1, 2, 3, \ldots$ Dalej,

$$\mathrm{Lg}\,\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}=\frac{\Theta^2_{-(n+i)}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\{\vartheta.\,\Theta_{-(n+i)}\}}<\frac{k_0^{2i}.\,\varepsilon'^2}{2\cos^2\Theta_{-(n+i)}},$$

gdzie $0<\vartheta<1$. Możemy przyjąć $\varepsilon'<\frac{\pi}{4}$, tak iż $2\cos^2\Theta_{-(n+i)}>1$: w takim razie mamy nierówność:

$$\mathrm{Lg}\,\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}<k_0^{2i}\,\varepsilon'^2<k_0^{2i}\,\varepsilon';$$

Sumując szereg podobnych nierówności, otrzymamy:

$$\sum_{i=0}^{=l-1}\mathrm{Lg}\,\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}<\varepsilon'\{1+k_0^2+k_0^4+\ldots\}<\frac{1}{1-k_0^2}\,\varepsilon'<\frac{\alpha}{\alpha-1}\,\varepsilon'<\frac{\varepsilon}{2},$$

ponieważ $k_0<\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$; ($k_0$ ma wartość, która była określona poprzednio, patrz w tymże ustępie 7°). Stąd ostatecznie:

$$x_{-(n+l)}<\mathrm{Lg}_l\,x_{-n}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\mathrm{Lg}\,\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}<e^{\alpha}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{o ile } n\geqslant\nu_3$$

i $l\geqslant l_0$, t. j.

$$e^{\alpha}<x_{-n}<e^{\alpha}+\varepsilon,$$

dla każdego $n\geqslant\nu_3+l_0$, co trzeba było udowodnić.

12°. Dowód jednostajnej zbieżności, o ile dotyczy części Q_2 obszaru D jest więc doprowadzony do końca. Zanim przejdziemy do rozszerzenia dowodu na cały obszar D, zauważymy, iż dla punktów, znajdujących się wewnątrz koła Γ' zatoczonego z punktu e^{α} jako ze środka promieniem $e^{\alpha}-e^{\beta}-\varepsilon_0$ można dać bezpośredni dowód zbieżności, nadzwyczajnie prosty.

Weźmy pod uwagę funkcję:

$$\Phi(z)=\frac{\mathrm{Log}\,z-e^{\alpha}}{z-e^{\alpha}}=\frac{\mathrm{Lg}\,z-e^{\alpha}}{z-e^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\left\{1-\tfrac{1}{2}\,\frac{z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)^2-\ldots\right\}$$

gdzie rozwinięcie na szereg jest zbieżne dla $\frac{|z-e^{\alpha}|}{e^{\alpha}}<1$ i zbadajmy tę funkcję na kole Γ o promieniu $e^{\alpha}-e^{\beta}$, zakreślonem z punktu e^{α}. Maximum modułu funkcji analitycznej $\Phi(z)$ na kole Γ ma miejsce, jak widać z szeregu, w punkcie $z=e^{\beta}$ tego koła, i wartość ta równa się 1. Tak więc, na kole Γ' współśrodkowem o promieniu mniejszym i wewnątrz tego koła Γ', mamy $|\Phi(z)|<K<1$.

Jeśli więc z jest wewnątrz Γ', to $|\mathrm{Lg}\, z - e^{\alpha}| < K \,.\, |z - e^{\alpha}|$, tak iż $\mathrm{Lg}\, z$ należy do tego obszaru. Mamy dalej

$$|\mathrm{Lg}_2\, z - e^{\alpha}| < K \,.\, |\mathrm{Lg}\, z - e^{\alpha}| < K^2 \,.\, |z - e^{\alpha}|, \ldots .$$

$$|\mathrm{Lg}_n\, z - e^{\alpha}| < K\, |\mathrm{Lg}_{n-1}\, z - e^{\alpha}| < K^n \,.\, |z - e^{\alpha}|.$$

Ponieważ $K < 1$, wnioskujemy ztąd, iż $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{Lg}_n\, z - e^{\alpha}$ jednostajnie.

3. Stopniowe rozszerzenie dowodu na cały obszar D.

a) Pierwsze rozszerzenie.

Przekształcenie $z_1 = \mathrm{Lg}\, z$ zamienia punkty, leżące zewnątrz koła σ o promieniu $= e^{\beta} + \varepsilon_1$ i zakreślonego z punku początkowego spółrzędnych jako ze środka na punkty obszaru Q_2, przyczem $\varepsilon_1 = e^{\beta}(a^{\varepsilon_0} - 1)$, może być dowolnie małą liczbą wraz z ε_0. Tak więc istnienie punktu granicznego e^{α} jest zapewnione dla wszystkich punktów zewnątrz koła σ. Jeśli teraz chcemy oprócz tego zabezpieczyć zbieżność jednostajną, to ograniczymy się do punktów, leżących wewnątrz koła C o promieniu R, które to koło wchodzi w skład konturu L, okalającego obszar D. W rzeczy samej, punkty wewnątrz koła C przekształcają się na punkty, których odcięta $x < \mathrm{Lg}\, R$; ponieważ oprócz tego $y \leqslant \dfrac{\pi}{m}$, więc punkt, leżący w pierścieniu między okręgami σ i C, przekształci się na punkt leżący nie tylko wewnątrz Q_2, ale także wewnątrz C, t. j. należeć będzie do D, ponieważ, zakładamy, iż R jest dostatecznie wielkie, tak że spełniona jest nierówność $(\mathrm{Lg}\, R)^2 + \dfrac{\pi^2}{m^2} < R^2$.

b) Drugie rozszerzenie.

Na mocy poprzedniego, przy dalszych rozszerzeniach możemy brać pod uwagę punkty, leżące wewnątrz σ, i tylko te punkty.

Zauważmy, iż jeśli w ciągu M, M_{-1}, M_{-2}, $M_{-3}, \ldots,$ którykolwiek z punktów, dajmy na to punkt M_{-k}, wyjdzie z σ, to i wszystkie następne punkty $M_{-(k+1)}$, $M_{-(k+2)}, \ldots,$ będą leżeć zewnątrz σ.

Wydzielmy wewnątrz σ zbiór punktów, dla których kąt biegunowy Θ spełnia nierówność $|\Theta| > \Theta_0$, gdzie $\Theta_0 > 0$ jest liczbą

łowolnie małą, w każdym razie tak małą, by spełniała pewne warunki, które niebawem określimy.

Twierdzę, iż istnieje liczba N, posiadająca tę własność, iż każdy punkt M obszaru σ. dla którego $|\Theta| > \Theta_0$, „wyjdzie“ z σ conajmniej po N przekształceniach, przyczem to wyrażenie „wyjdzie“ oznacza, iż punkt M_{-N} już do σ nie należy.

W rzeczy same, jeśli Θ_{-n} jest kątem biegunowym punktu M_{-n}, położonego wewnątrz σ, w takim razie, na mocy (4) mamy

$$\frac{\Theta_{-n}}{\Theta_{-(n-1)}} > \frac{e^\alpha}{\alpha r_{-n}} = \frac{e^\beta}{\beta r_{-n}} > 1,$$

ponieważ $r_{-n} < \frac{e^\beta}{\beta}$, co z pewnością będzie miało miejsce, jeśli $\varepsilon_1 < e^\beta \frac{1-\beta}{\beta}$, co zakładamy. Tak więc

$$\frac{\Theta_{-n}}{\Theta_{-(n-1)}} > k_0 > 1,$$

gdzie $k_0 = \frac{e^\beta}{\beta(e^\beta + \varepsilon_1)}$ jest liczbą, zawartą między $\frac{1}{\beta}$ i 1. Ponieważ tylko co otrzymana nierówność stosuje się do wszystkich wskaźników, mniejszych od n, więc stąd otrzymamy

$$\Theta_{-n} > k_0^n \,.\, \Theta.$$

Niech teraz $n = N$, gdzie N oznacza liczbę całkowitą dodatnią, spełniającą nierówność $k_0^{N-1}\,\Theta_0 > 1$. W takim razie otrzymamy $\Theta_{-(N-1)} > 1$, a więc dalej

$$r_{-N} \geqslant y_{-N} = \frac{1}{m}\,\Theta_{-(N-1)} > \frac{e^\beta}{\beta} > e^\beta + \varepsilon_1,$$

co dowodzi, iż nie wszystkie punkty $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ mogą należeć do σ.

Możemy więc uważać za udowodnione istnienie granicy e^α dla wszystkich punktów M spełniających warunek $|\Theta| > \Theta_0$; punkt początkowy należy, oczywiście, uważać za wykluczony. Lecz jeśli chodzi o zbieżność jednostajną, należy okazać nietylko, iż punkt M_{-N} będzie leżał zewnątrz σ, jak to zrobiliśmy przed chwilą, ale że pozostanie wewnątrz D, t. j. że będzie wewnątrz C. W tym celu należy wykluczyć otoczenie punktu początkowego przy po-

mocy koła, któremu damy promień $=\frac{1}{R}$. W rzeczy samej. jeśli punkt M jest zewnątrz koła C_1, to i punkt M_{-1} będzie spełniał ten sam warunek, o ile $R\Theta_0 > m$, co przyjmiemy, ponieważ $y_{-1}=\frac{\Theta}{m}$ i w takim razie $|y_{-1}| \geqslant \frac{\Theta_0}{m} > \frac{1}{R}$. — Z drugiej strony $x_{-1}= = \operatorname{Lg} r > -\operatorname{Lg} R$, a więc $r_{-1}^2 < (\operatorname{Lg} R)^2 + \frac{\pi^2}{m^2} < R^2$, czyli $r_{-1} < R$, co dowodzi, iż punkt M_{-1} jest rzeczywiście wewnątrz C.

Tak więc twierdzenie o punkcie granicznym e^{α} możemy uważać za udowodnione dla wszystkich punktów obszaru D, z wyjątkiem tych, dla których promień wodzący $r \leqslant \frac{1}{R}$ i tych, dla których kąt biegunowy Θ spełnia warunek $|\Theta| \leqslant \Theta_0$. Obszar ten dotychczas nie objęty naszym dowodem zawiera wewnątrz punkty $\omega_1, \omega_2, \ldots$ i punkt e^{β}.

c) *Trzecie rozszerzenie.*

Przyłączymy teraz punkty, których odległość od punktu początkowego zawarta jest między $\frac{1}{R}$ i $a^{-\frac{\lambda}{R}}$, gdzie $\lambda > 1$ jest liczbą, która zależy od obszaru D za pośrednictwem liczby całkowitej n, (n jest liczbą kół $C_1, C_2, \ldots, C_n$ należących do określenia D); wartość tej stałej w zależnoścl od n ustalimy później. Tak więc okażemy, iż twierdzenie o granicy e^{α} stosuje się i do punktów, dla których $|\Theta| \leqslant \Theta_0$, byleby tylko $\frac{1}{R} < r < a^{-\frac{\lambda}{R}}$.

W rzeczy samej, punkty, dla których $\frac{1}{R} < r < a^{-\frac{\lambda}{R}}$, przekształcają się na skutek podstawienia $z' = \operatorname{Lg} Z$ na punkty pasma, zawartego między prostemi równoległemi $x = -\operatorname{Lg} R$ i $x = -\frac{\lambda}{R}$, które to punkty leżą całkowicie w tej części obszaru D, dla której twierdzenie o granicy na mocy poprzedniego rozszerzenia stosuje się w zupełności; należy, oczywiście, przyjąć także pod uwagę, iż $\frac{\pi}{m} \leqslant y < -\frac{\pi}{m}$.

Zauważmy, iż przez tylko co wykonane rozszerzenie osiągnęliśmy obszar, który można utożsamić z obszarem D w wypadku, gdy $n = 1$, t. j. możemy uważać nasze twierdzenie za udowodnione w przypadku, gdy obszar D utworzony jest przy pomocy C, C_1 i γ_1.

d) Stopniowe dalsze rozszerzenie przez indukcję.

W przypadku, gdy $n = 2$, t. j. gdy D utworzymy przy pomocy C, C_1, C_2 i γ_2, do poprzednio otrzymanego obszaru dołączymy punkty, których odległość od początku spółrzędnych zawarta jest między $a^{\frac{1}{R}}$ i $a^{a^{-\frac{1}{R}}} \cos \Theta_0$. W rzeczy samej, twierdzenie o granicy e^α stosuje się i do punktów, dla których $a^{\frac{1}{R}} < r < a^{a^{-\frac{1}{R}}} \cos \Theta_0$, gdyż po zastosowaniu jednego przekształcenia $z' = \mathrm{Lg}\, z$ punkty te zamieniają się na punkty, leżące wewnątrz pasma utworzonego przez dwie proste równoległe $x = \frac{1}{R}$ i $x = a^{-\frac{\lambda}{R}} \cos \Theta_0$, które to punkty całkowicie mieszczą się w obszarze, dla którego istnienie granicy e^α zostało udowodnione na mocy poprzedniego rozszerzenia.

W podobny sposób postępujemy kolejno dalej. Nowe rozszerzenie daje nam obszar, który można utożsamić z D dla $n = 3$; następne rozszerzenie pozwoli osiągnąć przypadek $n = 4$ i t. d.

Obszary pierścieniowe, które kolejno przyłączamy są

$$\frac{1}{R} \leqslant r \leqslant a^{-\frac{\lambda}{R}}; \qquad a^{\frac{1}{R}} \leqslant r \leqslant a^{a^{-\frac{\lambda}{R}}} \cos \Theta_0;$$

$$a_2\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_2(a^{-\frac{\lambda}{R}}); \ldots, \text{ wreszcie } a_{n-1}\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_{n-1}(a^{-\frac{\lambda}{R}}),$$

gdzie $b_1(a^{-\frac{\lambda}{R}}) = b_1(u) = a^{u \cos \Theta_0}$, $b_2(u) = a^{b_1(u) \cos \Theta_0}$,
$b_3(u) = a^{b_2(u) \cos \Theta_0}, \ldots, b_{n-1}(u) = a^{b_{n-2}(u) \cos \Theta_0}$.

By szczegóły rachunków doprowadzić do końca, wygodnie jest zmienić nieco wspomniane wyżej obszary pierścieniowe, zwężając je nieco. Zamiast $a^{-\frac{\lambda}{R}}$ weźmiemy $1 - \frac{m\lambda}{R} < a^{\frac{\lambda}{R}}$ zamiast $a^{\frac{1}{R}}$ weźmiemy $1 + \frac{m}{R} e_1$, gdzie $e_1 = e - 1$; zamiast $b_2(a^{-\frac{\lambda}{R}})$, weźmiemy $a^{1-\frac{m\lambda}{R}}$. Taka zamiana będzie uprawomocniona, o ile odpowiada rzeczywiście zwężeniu, co będzie miało miejsce, o ile $R > 1 + m\lambda$

i $1 - m\frac{\lambda}{R} < e^{-\frac{m\lambda}{R}} \cos \Theta_0$; połóżmy $\frac{m\lambda}{R} = w < 1$; warunek poprzedni przyjmuje postać:

$$1 - w < e^{-w} \cos \Theta_0; \tag{8}$$

nierówność ta będzie spełniona, o ile $\Theta_0 \leqslant w = \frac{m\lambda}{R}$.

Następne rozszerzenie daje nam obszar pierścieniowy

$$a_2\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_2\left(a^{-\frac{\lambda}{R}}\right),$$

który zastąpimy obszarem:

$$a^{1+\frac{m e_1}{R}} \leqslant r \leqslant a^a \cdot a^{-\frac{am^2\lambda}{R}},$$

co jest uprawomocnione, o ile $1 - \frac{m^2\lambda}{R} < e^{-\frac{m^2\lambda}{R}} \cos \Theta_0$; kładąc $\frac{m^2\lambda}{R} = w$, odnajdujemy znów ten sam warunek (8), który więc będzie spełniony, o ile $\Theta_0 \leqslant \frac{m^2\lambda}{R}$; pozatem musimy założyć, iż

$$R > \frac{m(e_1 + a\lambda m)}{a - 1}.$$

Strefą pierścieniową $a_3\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_3\left(a^{-\frac{\lambda}{R}}\right)$ zastąpimy następującą węższą

$$a^{a\left(1 + m^2\frac{e_1^2}{R}\right)} \leqslant r \leqslant a^{(a^a)\left(1 - \frac{m^2 a\lambda}{R}\right)}$$

pod warunkiem, iż po pierwsze

$$R > \frac{\omega_3 m^2 (e_1^2 + \omega_4 m\lambda)}{\omega_4 - \omega_3},$$

(gdzie $\omega_3 = a$, $\omega_4 = a^a$ i t. d.), a po drugie

$$1 - \frac{am^3\lambda}{R} < e^{-am^3\frac{\lambda}{R}} \cos \Theta_0; \text{ kładąc } w = \frac{am^3\lambda}{R},$$

odnajdujemy zawsze jeden i ten sam warunek (8), wskutek czego musimy założyć warunek $\Theta_0 \leqslant \frac{am^3\lambda}{R}$.

Strefa $a_4\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_4(a^{-\frac{\lambda}{R}})$ zastąpiona będzie przez obszar pierścieniowy

$$a^{\omega_4\left(1+\omega_3\frac{m^3e_1^3}{R}\right)} \leqslant r \leqslant a^{\omega_5\left(1-\frac{\omega_4\omega_3m^4\lambda}{R}\right)},$$

pod warunkiem, iż po pierwsze

$$1-\frac{\omega_4\,\omega_3\,m^4\lambda}{R} < e^{-\frac{\omega_4\omega_3m^4\lambda}{R}}\cos\Theta_0$$

a po drugie

$$R > \frac{\omega_4\omega_3m^3(e_1^3+\omega_5m\lambda)}{\omega_5-\omega_4};\ \text{kładąc}\ w = \frac{\omega_4\omega_3m^4\lambda}{R},$$

odnajdziemy znów warunek (8), a więc należy przyjąć, iż $\Theta_0 \leqslant \frac{\omega_4\,\omega_3\,m^4\lambda}{R}$.

Za pomocą indukcji możemy sprawdzić, iż strefa

$$a_k\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_k(a^{-}\ )$$

może być zastąpiona przez strefę

$$a^{\omega_k\left\{1+\frac{\omega_{k-1}\omega_{k-2}\cdots\omega_3m^{k-1}e_1^{k-1}}{R}\right\}} \leqslant r \leqslant a^{\omega_{k+1}\left\{1-\frac{\omega_k\,\omega_{k-1}\cdots\omega_3\,m^k\lambda}{R}\right\}}$$

z dołączeniem warunków

$$R > \frac{\omega_k\,\omega_{k-1}\ldots\omega_3\,m^{k-1}(e_1^{k-1}+\omega_{k+1}m\lambda)}{\omega_{k+1}-\omega_k}.$$

(9) i $$\Theta_0 \leqslant \frac{\omega_k\,\omega_{k-1}\ldots\omega_3\,m^k\lambda}{R}.$$

Ostatnią strefę będzie można zastąpić strefą

$$a^{\omega_{n-1}\left\{1+\frac{\omega_{n-2}\omega_{n-3}\cdots\omega_3m^{n-1}e_1^{n-1}}{R}\right\}} \leqslant r \leqslant a^{\omega_n\left\{1-\frac{\omega_{n-1}\omega_{n-2}\cdots\omega_3m^{n-1}\lambda}{R}\right\}}$$

z dołączeniem warunków

$$R > \frac{\omega_{n-1}\,\omega_{n-2}\ldots\omega_3\,m^{n-2}(e_1^{n-2}+\omega_n m\lambda)}{\omega_n-\omega_{n-1}}$$

(9′) i $$\Theta_0 \leqslant \frac{\omega_{n-1}\,\omega_{n-2}\ldots\omega_3\,m^{n-1}\lambda}{R}.$$

Zwężając jeszcze bardziej pierścień, można poprzednią strefę jeszcze zastąpić następującą

$$\omega_n\left\{1+\frac{\omega_{n-1}\,\omega_{n-2}\ldots\omega_3\,m^{n-1}e_1^{n-1}}{R}\right\}\leqslant r\leqslant\omega_{n+1}\left\{1-\frac{\omega_n\omega_{n-1}\ldots\omega_3 m^n\lambda}{R}\right\}\quad(10)$$

co wymaga dodatkowego warunku:

$$R>\frac{\omega_n\,\omega_{n-1}\ldots\omega_3\,m^{n-1}(e_1^{n-1}+\omega_{n+1}\,m\,\lambda)}{\omega_{n+1}-\omega_n}.\quad(11)$$

Wzór (10) uwidacznia okoliczność, iż nasza strefa rozpościera się między punktami ω_n i ω_{n+1}, nie sięgając do tych punktów, lecz zbliża się do nich dowolnie blizko, o ile obierzemy R dostatecznie wielkie.

Ponieważ wraz z n^{ta} strefą osiągnęliśmy kres naszych kolejnych rozszerzeń, nie pozostaje nam nic innego, jak ustalić liczbę λ, która dotychczas nie była określona dokładnie. Możemy naprzykład, uczynić następujący wybór, kładąc

$$\lambda=\frac{1}{\omega_{n-1}\,\omega_{n-2}\ldots\omega_3 m^{n-1}}>1.$$

Przy takim wyborze liczby λ warunek (9′) przyjmuje postać $\Theta_0\,R\leqslant 1$; wziąwszy pod uwagę, iż musieliśmy założyć poprzednio $\Theta_0\,R>m$, otrzymamy ostatecznie warunek

$$m<R\Theta_0\leqslant 1,\quad(12)$$

który to związek pozwoli nam ustalić kąt Θ_0 po uprzednim wyborze promienia R.

Łatwo teraz sprawdzić, iż spełnienie nierówności (11) i (12), tyczących się R i Θ_0 pociąga za sobą spełnienie się podobnych nierówności, któreśmy napotkali przy przechodzeniu od jednej strefy do drugiej, jako warunek słuszności naszych rozumowań i przekształceń; mianowicie warunki (8) będą spełnione dla każdego $k\leqslant n-1$, gdyż $\omega_{k-1}\,\omega_{k-2}\ldots\omega_3\,m^k$ maleje, gdy k rośnie, gdy tymczasem $\dfrac{\omega_k\,\omega_{k-1}\ldots\omega_3 m^{k-1}(e_1^{k-1}+\omega_{k+1}\,m\,\lambda)}{\omega_{k+1}-\omega_k}$ rośnie wraz z k. To ostatnie łatwo udowodnić, zauważywszy, iż

$m\,\omega_k<\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{\omega_k-\omega_{k-1}}<m\,\omega_{k+1}$; (a więc $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\omega_{n+1}-\omega_n}{\omega_n-\omega_{n-1}}=\beta$). Patrz dodatek III).

Warunek (11) może być zastąpiony prostszym

$$R > e_1^{n-1} + \left(\frac{e^\beta}{\beta}\right)^{n-1}. \tag{13}$$

Gdy dany jest obszar D, znaną jest odpowiadająca mu liczba n. Promień R koła C bierzemy dowolnie wielki, w każdym razie większy od liczby danej przez wzór (13). Gdy R zostało w ten sposób ustalone, wybieramy Θ_0, tak by zadość uczynić warunkowi (12). Jeśli R jest dostatecznie wielkie, obszary wykluczone, do których nie sięgają nasze rozszerzenia, a które otaczają punkty (ω) i zawierają je, będą całkowicie się mieścić wewnątrz kół C_1, C_2, $C_3, \ldots, C_n$ i γ_n. Tak więc w obszarze D, t. j. wewnątrz koła C, a zewnątrz kół C_1, $C_2, \ldots, C_n$ i γ_n zbieżność będzie jednostajna, t. j. $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^\alpha$ jednostajnie, co trzeba było udowodnić.

DODATEK II.

Mamy funkcję złożoną $F(z) = \mathcal{E}\{H(z)\}$, gdzie $\mathcal{E}(\zeta)$ jest funkcją całkowitą przestępną, funkcja $H(z)$ jest funkcją jednowartościową, o punktach osobliwych odosobnionych.

Trzeba okazać, że punkt $z = z_0$ nie może być dla funkcji $H(z)$ punktem osobliwym, o ile tenże punkt jest punktem regularnym dla funkcji złożonej $F(z)$.

W rzeczy samej, gdyby $z = z_0$ było punktem osobliwym, to mielibyśmy w tym punkcie biegun lub punkt istotnie osobliwy funkcji $H(z)$. Rozpatrzmy po kolei oba te przypuszczenia.

Niech $z = z_0$ będzie punktem istotnie osobliwym funkcji $H(z)$. Niech a i b oznaczają dwie liczby, spełniające warunek $\mathcal{E}(a) \neq \mathcal{E}(b)$ i oprócz tego takie, iż w dowolnie małem otoczeniu punktu $z = z_0$ funkcja $H(z)$ przyjmuje wartości a i b; jest to możliwe na zasadzie twierdzenia Picard'a. Stąd wniosek, iż i funkcja $F(z)$ w dowolnie małem otoczeniu $z = z_0$ przyjmuje wartości $\mathcal{E}(a)$ i $\mathcal{E}(b)$, nierówne sobie. Otóż to nie jest możliwe, jako sprzeczne z zasadniczą własnością funkcji regularnej w punkcie danym. Tak więc punkt $z = z_0$ nie może być punktem istotnie osobliwym. Tak samo nie może być i biegunem. Gdyby bowiem w punkcie $z = z_0$ był biegun funkcji $H(z)$, to byłyby w dowolnie małem oto-

czeniu punktu $z = z_0$ wartości zmiennej z, dla których $\zeta = H(z)$ przyjmuje wartości dowolnie mało różniące się od dowolnej liczby o modulu dostatecznie wielkim. Lecz istnieją wartości ζ_1 i ζ_2 zmiennej ζ o modulu większym od dowolnie wielkiej liczby, takie, że $\mathcal{E}(\zeta_1) = a$ i $\mathcal{E}\zeta_2) = b$, przyczem $a \neq b$. Stąd wniosek, że w dowolnie małem otoczeniu punktu $z = z_0$ istnieją także wartości z, dla których $F(z)$ przyjmuje wartości dowolnie mało różniące się od a i od b. Ponieważ $a \neq b$, nie da się to pogodzić z regularności funkcji $F(z)$ w punkcie $z = z_0$.

DODATEK III.

Liczby m, a, α, β, e^α, e^β są związane licznemi równościami i nierównościami, któremi nieraz posiłkowaliśmy się w toku pracy, a których zestawienie podajemy tu dla ułatwienia przy czytaniu tekstu.

$$a = e^m < \sqrt[e]{e}; \quad m = \frac{\alpha}{e^\alpha} = \frac{\beta}{e^\beta}; \quad \alpha > 1, \ \beta < 1; \quad m < \frac{1}{e};$$

$$1 < e^m < e^\beta < \frac{e^\alpha}{\alpha} < e^\alpha; \quad \frac{\alpha}{\beta} = e^{\alpha-\beta}; \quad a^{e^\alpha} = e^\alpha; \quad a^{e^\beta} = e^\beta;$$

$$\omega_2 = 1, \ \omega_3 = a, \ \omega_4 = a^{\omega_3}, \ldots\ldots, \omega_{k+1} = a^{\omega_k}$$

$$1 \leqslant \omega_k < e^\beta; \quad \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \ldots, < \omega_k < \omega_{k+1} < \ldots,.$$

$$\frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} < \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}, \text{ dla } k \geqslant 2; \text{ stąd } \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} \leqslant a < e - 1 = e_1.$$

$$m\omega_{k+1} < \frac{\omega_{k+2} - \omega_{k+1}}{\omega_{k+1} - \omega_k} < m\omega_{k+2}.$$

Zastosowanie algebry logiki do teorji szyfrów.

Napisał

Edward Stamm.

Pewna klasa szyfrów daje się zdefiniować jako rezultat przekształcenia grup znaków (liter, kombinacji liter, cyfr, liczb i interpunkcji) na inne grupy znaków. Przekształcenie to obraca się w zakresie skończonym. Nic więc naturalniejszego, jak zwrócić się do algebry logiki która z natury rzeczy może być z łatwością dostosowana do zakresów skończonych.

Zajmę się tutaj przykładem przekształcenia pojedynczych liter na litery pojedyncze, czyli pewnego rodzaju szyfrowaniem liter i słów z wykluczeniem cyfr (liczb) i interpunkcji. Zaznaczam przytem, że nie mam na razie na oku praktycznego zastosowania, lecz badam całą sprawę ze stanowiska matematyka. Być może, że z tego względu będą rezultaty badań ze stanowiska praktycznego mało ważne; jednak ze stanowiska teoretycznego przypisuję im pewną wagę.

Naszym zakresem niechaj będą litery

(1) a, ą, b, c, ć, d, e, ę, f, g, h, i, j, k, l, ł, m, n, ń, o, ó, p, r, s (ś), t, u, v, w, x, y, z (ź), ż.

Pragniemy więc przekształcić słowa składające się z tych liter, lub pojedyncze litery z podanego zakresu na inne. Pragniemy je następnie przekształcić zapomocą równań transformacyjnych, opartych na działaniach algebry logiki. Innemi słowy, chcemy uważać zakres podanych liter za zakres logiczny. Nadmieniamy, że litery

wzięte w nawias uważamy za równoważne z literami stojącemi przed nawiasem, więc literę s za równoważną z literą $ś$, literę z za równoważną z literą $ż$.

Aby nasz zakres liter uczynić zakresem logicznym posługujemy się metodą Huntingtona, ogłoszoną w rozprawie „Sets of independent postulates for the Algebra of Logic". [1])

Przedewszystkiem konstatujemy, że nasz zakres może być logicznym, ponieważ zawiera $2^n = 32$ elementy. Po skonstatowaniu tego należy jeszcze określić odpowiednio sumę logiczną, iloczyn logiczny i negację. Stosownie do podanej metody obieramy na zero logiczne np. literę v. Następnie wybieramy najmniejsze składniki.[2]) Niechaj będą nimi ze względu, że $n = 5$

$$s_1 = a,\ s_2 = e,\ s_3 = i,\ s_4 = o,\ s_5 = u. \tag{2}$$

Sumy określamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
s_1 \cup s_2 &= p_{12} = ą \\
s_1 \cup s_3 &= p_{13} = b \\
s_1 \cup s_4 &= p_{14} = c \\
s_1 \cup s_5 &= p_{15} = ć \\
s_2 \cup s_3 &= p_{23} = d \\
s_2 \cup s_4 &= p_{24} = ę \\
s_2 \cup s_5 &= p_{25} = f \\
s_3 \cup s_4 &= p_{34} = g \\
s_3 \cup s_5 &= p_{35} = h \\
s_4 \cup s_5 &= p_{45} = j \\
s_1 \cup s_2 \cup s_3 &= p_{123} = k \\
s_1 \cup s_2 \cup s_4 &= p_{124} = l \\
s_1 \cup s_2 \cup s_5 &= p_{125} = ł \\
s_1 \cup s_3 \cup s_4 &= p_{134} = m \\
s_1 \cup s_3 \cup s_5 &= p_{135} = n \\
s_1 \cup s_4 \cup s_5 &= p_{145} = ń \\
s_2 \cup s_3 \cup s_4 &= p_{234} = ó
\end{aligned} \tag{2a}$$

[1]) Trans. of the Amer. Math. Soc. tom 5, 1904, str. 308 i nast. lub 2) str. 30 n.

[2]) Por. moją Algebrę Logiki, Warszawa 1913, str. 28 n

$$s_2 \cup s_3 \cup s_5 = p_{235} = p$$
$$s_2 \cup s_4 \cup s_5 = p_{245} = r$$
$$s_3 \cup s_4 \cup s_5 = p_{345} = s(\acute{s})$$
$$s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup s_4 = p_{1234} = t$$
$$s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup s_5 = p_{1235} = w$$
$$s_1 \cup s_2 \cup s_4 \cup s_5 = p_{1245} = y$$
$$s_1 \cup s_3 \cup s_4 \cup s_5 = p_{1345} = z(\dot{z})$$
$$s_2 \cup s_3 \cup s_4 \cup s_5 = p_{2345} = \dot{z}$$
$$s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup s_4 \cup s_5 = p_{12345} = x.$$

Znak $\cup$ jest symbolem sumy logicznej.

Wynika z tego, że na ogół logiczny wybieramy literę x. — Ponieważ suma logiczna dwu dowolnych przedmiotów jest wtedy określona wzorem

$$p_{k\ldots\ldots m} \cup p_{r\ldots\ldots t} = p_{k\ldots mr\ldots t}$$

gdzie $k\ldots mr\ldots t$ zawiera wskaźniki przedmiotu

$$p_{k\ldots\ldots m}$$

i przedmiotu

$$p_{r\ldots\ldots t}$$

więc t a b l i c a s u m l o g i c z n y c h przedstawia się w następujący sposób:

	v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x	
v	v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x	
a	a	a	ą	b	c	ć	k	ą	l	ł	m	n	b	ń	k	l	ł	m	n	ń	c	t	w	y	z	t	ć	w	y	z	x	x	
ą	ą	ą	ą	k	l	ł	k	ą	l	ł	t	w	k	y	k	l	ł	t	w	y	l	t	w	y	x	t	ł	w	y	x	x	x	
b	b	b	k	b	m	n	k	k	t	w	m	n	b	z	k	t	w	m	n	z	m	t	w	x	z	t	n	w	x	z	x	x	
c	c	c	l	m	c	ń	t	l	l	y	m	z	m	ń	t	l	y	m	z	ń	c	t	x	y	z	t	ń	x	y	z	x	x	
ć	ć	ć	ł	n	ń	c	w	ł	y	ł	z	n	n	ń	w	y	ł	z	n	ń	ń	x	w	y	z	x	ć	w	y	z	x	x	
d	d	k	k	k	t	w	d	d	ó	p	ó	p	d	ż	k	t	w	t	w	x	ó	o	p	ż	ż	t	p	w	x	x	ż	x	
e	e	ą	ą	k	l	ł	d	e	ę	f	ó	p	d	r	k	l	ł	t	w	y	ę	ó	p	r	ż	t	f	w	y	x	ż	x	
ę	ę	l	l	t	l	y	ó	ę	ę	r	ó	ż	ó	r	t	l	y	t	x	y	ę	o	ż	r	z	t	r	x	y	x	ż	x	
f	f	ł	ł	w	y	ł	p	f	r	f	ż	p	p	r	w	y	ł	x	w	y	r	ż	p	r	ż	x	f	w	y	x	ż	x	
g	g	m	t	m	m	z	ó	ó	ó	ż	g	s	g	s	t	t	x	m	z	z	g	ó	ż	ż	s	t	s	x	x	z	ż	x	
h	h	n	w	n	z	n	p	p	ż	p	s	h	h	s	w	x	w	z	n	z	s	ż	p	ż	s	x	h	w	x	z	ż	x	
i	i	b	k	b	m	n	d	d	ó	p	g	h	i	s	k	t	w	m	n	z	g	ó	p	ż	s	t	h	w	x	z	ż	x	
j	j	ń	y	z	ń	ń	ż	r	r	r	s	s	s	j	x	y	y	z	z	ń	j	ż	ż	r	s	x	j	x	y	z	ż	x	
k	k	k	k	k	t	w	k	k	t	w	t	w	k	x	k	t	w	t	w	x	t	t	w	x	x	t	w	w	x	x	x	x	
l	l	l	l	t	l	y	t	l	l	y	t	x	t	y	t	l	y	t	x	y	l	t	x	y	x	t	y	x	y	x	x	x	
ł	ł	ł	ł	w	y	ł	w	ł	y	ł	x	w	w	y	w	y	ł	x	w	y	y	x	w	y	x	x	ł	w	y	x	x	x	(3)
m	m	m	t	m	m	z	t	t	t	x	m	z	m	z	t	t	x	m	z	z	m	t	x	x	z	t	z	x	x	z	x	x	
n	n	n	w	n	z	n	w	w	x	w	z	n	n	z	w	x	w	z	n	z	z	x	w	x	z	x	n	w	x	z	x	x	
ń	ń	ń	y	z	ń	ń	x	y	y	y	z	z	z	ń	x	y	y	z	z	ń	ń	x	x	y	z	x	ń	x	y	z	x	x	
o	o	c	l	m	c	ń	ó	ę	ę	r	g	s	g	j	t	l	y	m	z	ń	o	ż	z	r	s	t	j	x	y	z	ż	x	
ó	ó	t	t	t	t	x	ó	ó	ó	ż	ó	ż	ó	ż	t	t	x	t	x	x	ó	ó	ż	ż	ż	t	ż	x	x	x	ż	x	
p	p	w	w	w	x	w	p	p	ż	p	ż	p	p	ż	w	x	w	x	w	x	ż	ż	p	ż	ż	x	p	w	x	x	ż	w	
r	r	y	y	x	y	y	z	r	r	r	ż	ż	ż	r	x	y	y	x	x	y	r	ż	ż	r	ż	x	r	x	y	x	ż	x	
s	s	z	x	z	z	z	i	ż	ż	ż	s	s	s	s	x	x	x	z	z	z	s	ż	ż	ż	s	x	s	x	x	z	ż	x	
t	t	t	t	t	t	x	t	t	t	x	t	x	t	x	t	t	x	t	x	x	t	t	x	x	x	t	x	x	x	x	x	x	
u	u	ć	ł	n	ń	ć	p	f	r	f	s	h	h	j	w	y	ł	z	n	ń	j	ż	p	r	s	x	u	w	y	z	ż	x	
w	w	w	w	w	x	w	w	w	x	w	x	w	w	x	w	x	w	x	w	x	x	x	w	x	x	x	w	w	x	x	x	x	
y	y	y	y	x	y	y	x	y	y	y	x	x	x	y	x	y	y	x	x	y	y	x	x	y	x	x	y	x	y	x	x	x	
z	z	z	x	z	z	z	x	x	x	x	z	z	z	z	x	x	x	z	z	z	z	x	x	x	z	x	z	x	x	z	x	x	
ż	ż	x	x	x	x	x	ż	ż	ż	ż	ż	ż	ż	ż	x	x	x	x	x	x	ż	ż	ż	ż	ż	x	ż	x	x	x	ż	x	
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	

Iloczyn logiczny określa się wzorem

$$p_K \cap p_L = p_M$$

gdzie znak $\cap$ jest symbolem iloczynu logicznego, a M zawiera wskaźniki wspólne przedmiotów p_K i p_L. Jeżeli więc np.

$$p_K = p_{245} = r \qquad \text{a} \qquad p_L = p_{1235} = w$$

to wtedy mamy

$$p_K \cap p_L = p_{245} \cap p_{1235} = p_{25} = f.$$

T a b l i c a i l o c z y n ó w l o g i c z n y c h przedstawia się więc w następujący sposób:

(4)

	v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x
v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
a	v	a	a	a	a	a	v	v	v	v	v	v	v	v	a	a	a	a	a	a	v	v	v	v	v	a	v	a	a	a	v	a
ą	v	a	ą	a	a	a	e	e	e	e	v	v	v	v	ą	ą	ą	a	a	a	v	e	e	e	v	ą	v	ą	ą	a	e	ą
b	v	a	a	b	a	a	i	v	v	v	i	i	i	v	b	a	a	b	b	a	v	i	i	v	i	b	v	b	a	b	i	b
c	v	a	a	a	c	a	v	v	o	v	o	v	v	o	a	c	a	c	a	c	o	o	v	o	o	c	v	a	c	c	o	c
ć	v	a	a	a	a	ć	v	v	v	u	v	u	v	u	a	a	ć	a	ć	ć	v	v	u	u	u	a	u	ć	ć	ć	u	ć
d	v	v	e	i	v	v	d	e	e	e	i	i	i	v	d	e	e	i	i	v	v	d	d	e	i	d	v	d	e	i	d	d
e	v	v	e	v	v	v	e	e	e	e	v	v	v	v	e	e	e	v	v	v	v	e	e	e	v	e	v	e	e	v	e	e
ę	v	v	e	v	o	v	e	e	ę	e	o	v	v	o	e	ę	e	o	v	o	o	ę	e	ę	o	ę	v	e	ę	o	ę	ę
f	v	v	e	v	v	u	e	e	e	f	v	u	v	u	e	e	f	v	u	u	v	e	f	f	u	e	u	f	f	u	f	f
g	v	v	v	i	o	v	i	v	o	v	g	i	i	o	i	o	v	g	i	o	o	g	i	o	g	g	v	i	o	g	g	g
h	v	v	v	i	v	u	i	v	v	u	i	h	i	u	i	v	u	i	h	u	v	i	h	u	h	i	u	h	u	h	h	h
i	v	v	v	i	v	v	i	v	v	v	i	i	i	v	i	v	v	i	i	v	v	i	i	v	i	i	v	i	v	i	i	i
j	v	v	v	v	o	u	v	v	o	u	o	u	v	j	v	o	u	o	u	j	o	o	u	j	j	o	u	u	j	j	j	j
k	v	a	a	b	a	a	d	e	e	e	i	i	i	v	k	a	a	b	b	a	v	d	d	e	i	k	v	k	a	b	d	k
l	v	a	a	a	c	a	e	e	e	e	o	v	v	o	ą	l	ą	c	a	c	o	e	e	e	o	l	v	a	l	c	e	l
ł	v	a	ą	a	a	ć	e	e	e	f	v	u	v	u	a	ą	ł	a	ć	ć	v	e	f	f	u	a	u	ł	ł	ć	f	t
m	v	a	a	b	c	a	i	v	o	v	g	i	i	o	b	c	a	m	b	c	o	g	i	o	g	m	v	b	c	m	g	m
n	v	a	a	b	a	ć	i	v	v	u	i	h	i	u	b	a	ć	b	n	ć	v	i	h	u	h	b	u	n	ć	n	h	n
ń	v	a	a	a	c	ć	v	v	o	u	o	u	v	j	a	c	ć	c	ć	ń	o	o	u	j	j	c	u	ć	ń	ń	j	ń
o	v	v	v	v	o	v	v	v	o	v	o	v	v	o	v	o	v	o	v	o	o	o	v	o	o	o	v	v	o	o	o	o
ó	v	v	e	i	o	v	d	e	ę	e	g	i	i	o	d	e	e	g	i	o	o	ó	t	e	g	ó	v	d	e	g	ó	ó
p	v	v	e	i	v	u	d	e	e	f	i	h	i	u	d	e	f	i	h	u	v	d	p	f	h	d	u	p	f	h	p	p
r	v	v	e	v	o	u	e	e	ę	f	o	u	v	j	e	ę	f	o	u	j	o	ę	f	r	j	ę	u	f	r	j	r	r
s	v	v	v	i	o	u	i	v	o	u	g	h	i	j	i	o	u	g	h	j	o	g	h	j	s	g	u	h	j	s	s	s
t	v	a	ą	b	c	a	d	e	ę	e	g	i	i	o	k	l	ą	m	b	c	o	ó	d	ę	g	t	v	k	l	m	ó	t
u	v	v	v	v	v	u	v	v	v	u	v	u	v	u	v	v	u	v	u	u	v	v	u	u	u	v	u	u	u	u	u	u
w	v	a	ą	b	a	ć	d	e	e	f	i	h	i	u	k	ą	ł	b	n	ć	v	d	p	f	h	k	u	w	ł	n	p	w
y	v	a	ą	a	c	ć	e	e	ę	f	o	u	v	j	ą	l	ł	c	ć	ń	o	ę	f	r	j	l	u	ł	y	ń	r	y
z	v	a	a	b	c	ć	i	v	o	u	g	h	i	j	b	c	ć	m	n	ń	o	g	h	j	s	m	u	n	ń	z	s	z
ż	v	v	e	i	o	u	d	e	ę	f	g	h	i	j	d	e	f	g	h	j	a	ó	p	r	s	ó	u	p	r	s	ż	ż
x	v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x

Negacja logiczna określa się wzorem

$$(p_K)' = p_{K'}$$

gdzie symbol $'$ oznacza negację, a k' zawiera wszystkie cyfry nie należące do K. Mamy więc np.

$$(p_{235})' = p_{14} = (p)' = c.$$

Tablica negacji logicznych ma więc postać:

v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x
x	ż	s	r	p	ó	ń	z	n	m	ł	l	y	k	j	h	g	f	ę	d	w	ć	c	b	ą	u	t	o	i	e	a	v

(5)

Po tem określeniu sumy logicznej, iloczynu logicznego i negacji możemy zastosować do naszego zakresu liter wszystkie twierdzenia algebry logiki.

Jeżeli chodzi nam o zaszyfrowanie tekstu, składającego się z naszego zakresu liter, będziemy mogli oprzeć się na funkcji logicznej

$$y = a\,x \cup b\,x' \tag{6}$$

gdzie $a\,x$ oznacza iloczyn logiczny liter a i x, zaś $b\,x'$ iloczyn logiczny liter b i negacji x. Wstawiając wtedy za a i b stałe lub zmienne litery, zresztą dowolne, — będziemy litery te nazywali w s k a ź n i k i e m — zaś za x litery, które mamy zaszyfrować, czyli jak się będziemy wyrażali s z y f r a n t y, otrzymamy wykonując na podstawie podanych wyżej tablic wskazane działanie logiczne. litery zaszyfrowane, czyli jak będziemy mówili s z y f r a t y.

Przykład: Niechaj będzie

$$a = 1, \quad b = m, \quad x = s.$$

Mamy wtedy

$$a\,x = ls = o, \quad x' = s' = ą, \quad b\,x' = m\,ą = a, \quad a\,x \cup b\,x' = o \cup a = c.$$

Przy wskaźniku l, m jest więc szyfratem litery s.

Jeśli chcemy dany szyfrat odszyfrować z powrotem należy oczywiście równania transformacyjne (6) rozwiązać względem x. Po rozwiązaniu otrzymamy

$$x = (ay \cup a'\,y')\,u \cup (b'\,y \cup by')\,u',$$

gdzie u jest dowolnym parametrem. Wynika z tego, że x jest wieloznaczne. Aby x było jednoznaczne, musi być

$$a\,y \cup a'\,y' = b'\,y \cup by'.$$

Daje to

$$a = b'.$$

Równanie (6) otrzymuje wtedy postać

$$y = b'x \cup bx',$$

czyli, jeżeli zamiast b napiszemy p,

(7) $$y = p'x \cup px'.$$

Ponieważ warunek jednoznaczności dla funkcji jest konieczny do odszyfrowania, a funkcja (7) jest pierwotniakiem, możemy powiedzieć, że o ile chodzi o wskaźnik o jednym zmiennym (lub stałym) parametrze, musi równanie transformacyjne przy szyfrowaniu i odszyfrowywaniu mieć postać równania (7), czyli odpowiednia funkcja musi być pierwotniakiem (pierwotkiem) 1-go stopnia. [1])

W tym wypadku więc odbywa się szyfrowanie w naszym zakresie (1), oraz odszyfrowywanie na podstawie równań transformacyjnych

(8) $$y = p'x \cup px'$$ $$x = p'y \cup py'.$$

Weźmy teraz pod uwagę spółczynnik (wskaźnik) p. Jeżeli będzie on stały, wtedy każda litera x będzie przedstawiona zawsze przez tę samą literę y szyfratu. Jest to oczywiście bardzo wielkie ułatwienie przy odszyfrowywaniu przez strony niepowołane. Odszyfrowywanie należy w tym wypadku do najłatwiejszych.

Możemy jednak założyć, że p jest zmienne. W tym wypadku wybieramy dla p pewien skończony, uporządkowany zakres, np.

(9) $$p = (p_i,\ p_k, \ldots\ldots, p_n),$$

w którym następstwo liter p_i, p_k, ... zostaje niezmienione. Wtedy wstawiamy przy kolejnem szyfrowaniu liter za p kolejno litery p_i, p_k, ... p_n, a potem z powrotem p_i, p_k, ... i t. d. W tym wypadku jest tasama litera x przedstawiona w szyfracie przez różne litery, co utrudnia niepowołane odszyfrowanie.

Przykład: Mamy zaszyfrowac tekst: „teorya szyfrów". Wskaźnikiem niechaj będzie grupa liter

radio.

---

[1]) l. c. str. 74 n.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
y = p'x \cup px' &= r't \cup rt' = bt \cup ru = b \cup u = n \\
&= a'e \cup ae' = że \cup az = e \cup a = ą \\
&= d'o \cup do' = ńo \cup dw = o \cup d = ó \\
&= i'r \cup ir' = yr \cup ib = r \cup i = ż \\
&= o'y \cup oy' = wy \cup oi = ł \cup v = ł \\
&= r'a \cup ra' = ba \cup rż = a \cup r = y \\
&= a's \cup as' = żs \cup aą = s \cup a = z \\
&= d'z \cup dz' = ńz \cup de = ń \cup e = y \\
&= i'y \cup iy' = yy \cup ii = y \cup i = x \\
&= c'f \cup cf' = wf \cup om = f \cup o = r \\
&= r'r \cup rr' = br \cup rb = v \cup v = v \\
&= a'ó \cup aó' = żó \cup ać = ó \cup a = t \\
&= d'w \cup dw' = ńw \cup do = ć \cup v = ć.
\end{aligned}$$

Szyfratem tekstu „teorja szyfrów“ przy wskaźniku „radio“ jest grupa liter

nąćżłyzyxrvtć.

W praktyce dzieli się zazwyczaj szyfrat na stałe grupy liter np. po 5. Ponieważ nam chodzi tylko wyłącznie o rezultaty teoretyczne, więc uważamy podział ten za zbyteczny.

Przy zmiennym wskaźniku przedstawia równanie transformacyjne

$$y = p'x \cup px'$$

funkcję logiczną o dwu zmiennych p, x:

$$y = f(p, x).$$

Dla ułatwienia szyfrowania możemy bardzo łatwo, korzystając z tej uwagi sporządzić na miejsce tablic iloczynów, sum i negacji jedną jedyną tablicę, która poda nam wprost dla każdego p i x odpowiednią wartość dla y. Piszemy w pierwszym wierszu wszystkie możliwe wartości x, w pierwszej kolumnie wszystkie możliwe wartości p, a w odpowiednich kratkach odpowiednie wartości dla y, według równania (7).

	v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x
v	v	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	ń	o	ó	p	r	s	t	u	w	y	z	ż	x
a	a	v	e	i	o	u	k	ą	l	ł	m	n	b	ń	d	e	f	g	h	j	c	t	w	y	z	ć	c	p	r	s	x	ż
ą	ą	e	v	d	ę	f	b	a	c	c	t	w	k	y	i	o	u	ó	p	r	l	m	n	ń	x	g	ł	h	j	ż	z	s
b	b	i	d	v	g	h	ą	k	t	w	c	ć	a	z	e	ó	p	o	u	s	m	l	ł	x	ń	ę	n	f	ż	j	y	r
c	c	o	ę	g	v	j	t	l	ą	y	b	z	m	ć	ó	e	r	i	s	u	a	k	x	ł	n	d	ń	ż	f	h	w	p
ć	ć	u	f	h	j	v	w	ł	y	ą	z	b	n	c	p	r	e	s	i	o	ń	x	k	l	m	ż	a	d	ę	g	t	ó
d	d	k	b	ą	t	w	v	i	g	h	ę	f	e	ż	a	m	n	l	ł	x	ó	o	u	s	r	c	p	ć	z	y	j	ń
e	e	ą	a	k	l	ł	i	v	o	u	ó	p	d	r	b	c	ć	t	w	y	ę	g	h	j	ż	m	f	n	ń	x	s	z
ę	ę	l	c	t	ą	y	g	o	v	j	d	ż	ó	f	m	a	ń	k	x	ł	e	i	s	u	p	b	r	z	ć	w	h	n
f	f	ł	c	w	y	ą	h	u	j	v	ż	d	p	ę	n	ń	a	x	k	l	r	s	i	o	ó	z	e	b	c	t	g	m
g	g	m	t	c	b	z	ę	ó	d	ż	v	j	o	h	l	k	x	a	ń	n	i	e	r	p	u	ą	s	y	w	ć	f	ł
h	h	n	w	ć	z	b	f	p	i	d	j	v	u	g	ł	x	k	ń	a	m	s	r	e	ż	o	y	i	ą	t	c	ę	l
i	i	b	k	a	m	n	e	d	ó	p	o	u	v	s	ą	t	w	c	ć	z	g	ę	f	ż	j	l	h	ł	x	ń	r	y
j	j	ń	y	z	ć	c	ż	r	f	ę	h	g	s	v	x	ł	l	n	m	a	u	p	ó	e	i	w	o	t	ą	b	d	k
k	k	d	i	e	ó	p	a	b	m	n	l	ł	ą	x	v	g	h	ę	f	ż	t	c	ć	z	y	c	w	u	s	r	ń	j
l	l	e	o	ć	e	r	m	c	a	ń	k	x	t	ł	g	v	j	d	ż	f	ą	b	ń	ć	w	i	y	s	u	p	n	h
(10) ł	ł	f	u	p	r	e	n	ć	ń	a	x	k	w	l	h	j	v	ż	d	ę	y	ń	b	c	t	s	ą	i	o	o	m	g
m	m	g	ó	o	i	s	l	t	k	x	a	ń	c	n	ę	d	ż	v	j	h	b	ą	y	w	ć	e	z	r	p	u	ł	f
n	n	h	p	u	s	i	ł	w	x	k	ń	a	ć	m	f	ż	d	j	v	g	z	y	ą	t	c	r	b	e	ó	o	l	ę
ń	ń	j	r	s	u	o	x	y	ł	l	n	m	z	a	ż	f	ę	h	g	v	ć	w	t	ą	b	p	c	ó	e	i	k	d
o	o	c	l	m	a	ń	ó	ę	e	r	i	s	g	u	t	ą	y	b	z	ć	v	d	ż	f	h	k	j	x	ł	n	p	w
ó	ó	t	m	l	k	x	o	g	i	s	e	r	e	p	c	b	ń	ą	y	w	d	v	j	h	f	a	z	ń	n	ł	u	ć
p	p	w	n	ł	x	k	u	h	s	i	r	e	f	ó	ć	ń	b	y	ą	t	ż	j	v	g	ę	ń	d	a	m	l	o	c
r	r	y	ń	x	ł	l	s	j	u	ó	p	ż	ż	e	z	ć	c	w	t	ą	f	h	g	v	d	n	ę	m	a	k	i	b
s	s	z	x	ń	n	m	r	ż	p	ó	u	o	j	i	y	w	t	ć	c	b	h	f	ę	d	v	ł	g	l	k	a	ę	ą
t	t	ó	g	ę	d	ż	c	m	b	z	ą	y	l	w	o	i	s	e	r	p	k	a	ń	n	ł	v	x	j	h	f	ć	u
u	u	c	ł	n	ń	a	p	f	r	e	s	i	h	o	w	y	ą	z	b	c	j	ż	d	ę	g	x	v	k	l	m	ó	t
w	w	p	h	f	ż	d	ć	n	z	b	y	ą	ł	t	u	s	i	r	e	ó	x	ń	a	m	l	j	k	v	g	ę	c	o
y	y	r	j	ż	f	ę	z	ń	ć	c	w	t	x	ą	s	u	o	p	ó	o	ł	n	m	a	k	h	l	g	v	d	b	i
z	z	s	ż	j	h	g	y	x	w	t	ć	c	ń	b	r	p	ó	u	o	i	n	ł	l	k	a	f	m	ę	d	v	ą	e
ż	ż	x	z	y	w	t	j	s	h	g	f	ę	r	d	ń	n	m	ł	l	k	p	u	o	i	e	ć	ó	c	b	ą	v	a
x	x	ż	s	r	p	ó	ń	z	n	m	ł	l	y	k	j	h	g	f	ę	d	w	ć	c	b	ą	u	t	o	i	e	a	v

Ponieważ równanie zapomocą którego szyfrujemy jest identyczne z równaniem zapomocą którego odszyfrowujemy (por. równanie 8), więc powyższa tablica służy zarazem i do odszyfrowywania w przyjętych warunkach.

Ponieważ wszystkie prawa algebry logiki stosują się do naszego zakresu (1), a więc do naszej teorji szyfrów, możemy z łatwością interpretować twierdzenia algebry logiki w dziedzinie szyfrów, o ile posiadają one tam jakiś sens. Ograniczamy się przedewszystkiem do problemu następującego.

Wiadomo, że w algebrze logiki daje się każdy przedmiot przedstawić w jeden jedyny sposób przez najmniejsze (ewentualnie największe) składniki.[1]) Znaczy to, że każda litera da się przedstawić w jeden jedyny sposób przez pewną ilość liter specjalnych, a mianowicie w naszym wypadku przez litery szeregu (2), w postaci sumy logicznej (jeżeli chodzi o składniki najmniejsze). Możemy łatwo skonstruować następującą tablicę na podstawie relacji (2a):

$$a = a$$

$$ą = a \cup e$$

$$b = a \cup i$$

$$c = a \cup o$$

$$ć = a \cup u$$

$$d = e \cup i$$

$$e = e$$

$$ę = e \cup o$$

$$f = e \cup u$$

$$g = i \cup o$$

$$h = i \cup u$$

$$i = i$$

$$j = o \cup u$$

$$k = a \cup e \cup i$$

$$l = a \cup e \cup o$$

$$ł = a \cup e \cup u$$

$$m = a \cup i \cup o$$

$$n = a \cup i \cup u$$

$$ń = a \cup o \cup u$$

$$o = o$$

$$ó = e \cup i \cup o$$

[1]) cf. 2).

(11)
$$
\begin{aligned}
p &= e \cup i \cup u \\
r &= e \cup o \cup u \\
s &= i \cup o \cup u \\
t &= a \cup e \cup i \cup o \\
u &= u \\
w &= a \cup e \cup i \cup u \\
y &= a \cup e \cup o \cup u \\
z &= a \cup i \cup o \cup u \\
\dot{z} &= e \cup i \cup o \cup u \\
x &= a \cup e \cup i \cup o \cup u.
\end{aligned}
$$

Według tych relacji rozłożony tekst, np. „stacya radiotelegraficzna“ przedstawiałby się więc w następujący sposób:

stacya radiotelegraficzna

icu aeio a ao aeou a eou a ei i o aeio e aeo e io eou a eu i ao aiou aiu a.

Oczywiście, że tak zaszyfrowany tekst byłby bardzo łatwy do odszyfrowania. Każda litera x jest tutaj przedstawiona zawsze przez jedną i tę samą grupę. Można jednak metodę tę skombinować z poprzednio przedstawioną, czyli zaszyfrować po rozłożeniu na składniki najmniejsze ostatni szyfrat. Jeżeli chcę np. przytoczony tekst zaszyfrować zapomocą wskaźnika „radio“ posługuję się tabliczką

(12)

	a	e	i	o	u
r	y	j	ż	f	ę
a	v	ą	b	c	c
d	k	i	e	ó	p
i	b	d	v	g	h
o	c	ę	g	*v*	j

Otrzymamy wtedy:

s t ac y a r adio t e l e g r a f i c z n a

iou aeio a ao aeou a eou a ei i o aeio e aeo e io eou a eu i ao aiou aiu a

rad iora d io radi o rad i or a d iora d ior a di ora d io r ad iora dio r

żcp bęic k bv yąćh c jcp b ęż b ó bężc ż bęf ą eg ęfc k dj ż vó bgfc kvj y.

Tekst „stacya radiotelegraficzna“ wyraża się więc wtedy szyfratem

żcp bęic k bv yąćh c jcp b ęż b ć bężc i bęf ą eg ęfc k dj ż vó bgfc kvj y.

Oczywiście, że taki sposób szyfrowania nie jest ze względów praktycznych ekonomicznym: 24 liter przedstawiamy w szyfracie przez 51. Aby zyskać na ekonomji, możemy posłużyć się następującą metodą: żądamy, aby tekst szyfratu składał się z pewnych ściśle określonych liter, a mianowicie takich, które zawierają jak najmniej elementów Morsego. (Znaczy to, że wykluczamy np. szyfrowanie przez aparat Hughesa, względnie wysuwamy na pierwszy plan szyfrowanie drogą radiotelegraficzną i aparatem Morsego). — W ten sposób możemy w części uzyskać z powrotem tę ekonomię, którą tracimy przez rozkład na wybrane litery. Ponieważ chodzi nam stosownie do tabliczki (12) dla naszego przykładu o pięć liter, które rozlokujemy wewnątrz tabliczki analogicznej do (12) tak, aby w tym samym wierszu nie powtarzała się ta sama litera. ale zresztą dowolnie (w przeciwnym wypadku nie byłoby odszyfrowanie jednoznaczne), wybieramy na ostateczne litery szyfratu tylko litery składające się najwyżej z 2 elementów Morsego, z kropki i kreski:

e · *t* — *i* .. *a* .— *n* —. (13)

Na tej podstawie otrzymamy w miejsce tabliczki (12) tabliczkę

	a	e	i	o	u
r	i	t	a	n	e
a	n	i	a	e	t
d	e	i	t	a	n
i	n	a	t	i	e
o	a	n	i	t	e

(14)

odnoszącą się oczywiście do wskaźnika „radio“. Szyfrując dawny tekst „stacja radiotelegraficzna“ w ostatni sposób otrzymamy teraz:

s t a c y a r a d i o t e l e g r a f i c z n a
iou aeio a ao aeou a eou a ei i o aeio e aeo e io ecu a eu i ao aiou aiu a
rad iora d io radi o rad i or a d iora d ior a di ora d io r ad iora dio r
aen nnae e nt iiae a ten n na a a nnae i nnn i ti nnt e ae a na nint ete i

jeżeli teraz zliczymy elementy Morsego w szyfrancie i szyfracie według ostatniej metody, otrzymamy dla szyfrantu 62 elementy, dla szyfratu 86 elementów, czyli na 100 szyfrantu, 139 szyfratu mimo, że litery są przedstawione przeciętnie przez 2·5 liter.

Zapytajmy się teraz, czy nie można w pewnych warunkach przedstawić całego szyfratu przez jedną i tę samą literę.

Nasze ogólne równanie transformacyjne ma postać

(7) $$y = p'x \cup px'.$$

Jeżeli litery szyfratu mają być wszystkie jednakowe, będzie

$$y = c.$$

Daje to równanie

(15) $$c = p'x \cup px'.$$

x jest dowolne, względnie zależne tylko od szyfrantu. Zatem musi być p funkcją logiczną zmiennych x i c, względnie zmiennej x i stałej c. Rozwiązując równanie (15) względem p otrzymujemy ostatecznie po redukcji

$$p = c'x \cup cx'.$$

Znaczy to, że dla każdego $x = x_0$, czyli jednakich x otrzymamy i jednakie p.

Innemi słowy: Szyfrowanie tego rodzaju jest możliwe. Szyfrat składa się wtedy zawsze z jednej i tej samej litery, natomiast jest wskaźnik zbiorem liter naogół różnych i posiada tę własność, że każdej literze x_0 szyfrantu odpowiada litera p_0 wskaźnika i to stale, że więc właściwie te same litery są przedstawione przez inne stałe, jeżeli za szyfrat będziemy uważali wskaźnik, co ze względów praktycznych (odszyfrowania) jest możliwem.

Przykład.

Szyfrant:	s t a c y a	r a d i o t e l e g r a f i c z n a
Wskaźnik:	v ł z n k z	d z r j h ł ż w ż u d z ó j n a c z
Szyfrat:	s s s s s s	s s s s s s s s s s s s s s s s s s

jeżeli na stałą literę szyfratu wybierzemy literę s.

Szyfrowanie odbywa się łatwo zapomocą naszej tablicy (10).

Kończę na tem ogólnem naszkicowaniu problemu, w nadzieji, że dalsze badania wykażą i praktyczną korzyść rozwiniętej tutaj w najogólniejszych zarysach teorji.

O wartościach charakterystycznych równań całkowych potencjału logarytmicznego.

Napisał

Włodzimierz Stożek.

Zagadnienia teorji potencjału.

Niech będzie dana krzywa nieprzecinająca się, zamknięta (C), położona w skończoności. Zakładamy, że równania tej krzywej dadzą się przedstawić w formie:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

przyczem parametr s oznacza długość łuku krzywej (C), liczoną w kierunku dodatnim.[1]) Nadto przypuszczamy, że funkcje $x(s)$ i $y(s)$ posiadają pierwsze pochodne ciągłe i że krzywizna uważana jako funkcja łuku, jest funkcją ograniczoną.

Będziemy oznaczać dla krótkości dowolny punkt płaszczyzny przez p, a ogólnie przez $f(p)$ funkcję spółrzędnych (x, y) tego pnnktu. Jeżeli punkt p znajduje się na krzywej (C), to jego położenie jest w zupełności określone przez wartość parametru s, którą w razie potrzeby także literą t lub u oznaczać będziemy.

Oznaczmy w dalszym ciągu przez (D) obszar otwarty, wewnętrzny, ograniczony krzywą (C), przez (D') obszar otwarty zewnętrzny, a przez $F(p)$ jakąkolwiek funkcję zmiennych x i y, która

[1]) Parametr s w przypadku, gdy ograniczenie jest elipsą, oznacza ekscentryczną anomalję.

posiada określone pochodne rzędu pierwszego: $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$. Uważajmy normalną w dowolnym punkcie krzywej (C), jako oś skierowaną do wnętrza. Niech α i β będą dostawy kierunkowe tej normalnej. Jeżeli wyrażenie $\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y}$ zmierza do oznaczonej granicy wówczas, gdy puukt p zmierza wzdłuż normalnej do punktu ograniczenia (C), nie opuszczając jednak obszaru (D), względnie obszaru (D'), to mówimy, że istnieje pochodna normalna wewnętrzna, albo też pochodna normalna zewnętrzna funkcji $F(p)$. Pochodną normalną wewnętrzną oznaczamy przez $\frac{dF}{dn_+}$, zewnętrzną zaś przez $\frac{dF}{dn_-}$. Jeżeli dana jest znów funkcja $f(p)$, określona w zupełności w płaszczyźnie x, y, to oznaczamy analogicznie przez $f_+(s)$, względnie $f_-(s)$ granicę, do której zmierza $f(p)$, gdy punkt p zmierza do punktu ograniczenia (C), nie opuszczając jednak obszaru (D), względnie obszaru (D').

Oznaczmy przez $r_{ps} = r_{sp}$ odległość punktu p od punktu s, położonego na krzywej (C), a przez $\mu(s)$ i $\nu(s)$ dwie ciągłe funkcje parametru s, które zwą się odpowiednio gęstościami warstwy pojedynczej lub podwójnej. Przy tych oznaczeniach:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}} \mu(t)\, dt \text{ [1]}$$

przedstawia p o t e n c j a ł w a r s t w y p o j e d y n c z e j, przyczem funkcja r_{pt} pod znakiem całki jest uważana za funkcję zmiennej t; gdy punkt p znajduje się na krzywej (C) i odpowiada wartości parametru $s = s_0$, to dla $t = s_0$ otrzymujemy pod znakiem całki nieciągłość logarytmiczną, przy której całka zachowuje sens.

Podobnie:

$$w(p) = \int \nu(t) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y(t)}{x - x(t)}\, dt \text{ [2]}$$

przedstawia p o t e n c j a ł w a r s t w y p o d w ó j n e j.

F u n k c j e $v(p)$ i $w(p)$ uważane jako funkcje zmiennych x

---

[1]) Wszędzie, gdzie nie ma podanych granic całkowania, należy przyjąć przedział od 0 do l, przyczem l oznacza długość krzywej (C).

[2]) Omówienie kwestji wielowartościowości funkcji arc tg. znajduje się w rozdziale 3.

i y, to jest spółrzędnych punktu p posiadają następujące własności:

1°) W każdym punkcie obszaru (D) lub obszaru (D') czynią zadość równaniu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2°) Funkcja $v(p)$ jest ciągła w każdym punkcie p płaszczyzny $x\,y$, pochodne zaś $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ są ciągłe w każdym punkcie obszaru (D), jak też obszaru (D'). Zachowanie się tych pochodnych w punktach ograniczenia (C), jak też w wypadku, gdy punkt p zmierza nie opuszczając obszaru (D), względnie obszaru (D') do punktu ograniczenia (C), charakteryzują następujące związki:

$$(1) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} = 2\pi\,\mu(s)\ ^{1)} \\ & \frac{dv}{dn_+} + \frac{dv}{dn_-} = 2\int \mu(t)\,\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arc\,tg}\frac{y(t)-y(s)}{x(t)-x(s)}\,dt \end{aligned} \right.$$

skąd wynika, że funkcje $\frac{dv}{dn_+}$ i $\frac{dv}{dn_-}$ są funkcjami ciągłemi parametru s, bo funkcja mnożąca $\mu(t)$ pod znakiem całki jest ciągła, gdy $s \neq t$ i wszędzie ograniczona. [2])

3°) Funkcja $w(p)$ jest ciągła w każdym punkcie obszaru (D) i w każdym punkcie obszaru (D'), funkcje zaś $w_+(s)$ i $w_-(s)$ są funkcjami ciągłemi parametru s, ponieważ zachodzą związki:

$$(2) \quad \left| \begin{aligned} & w_+(s) - w_-(s) = 2\pi\,\nu(s)\ ^{3)} \\ & w_+(s) + w_-(s) = 2\int \nu(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arc\,tg}\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}\,dt \end{aligned} \right.$$

4°) W każdym punkcie obszaru (D) i obszaru (D') istnieją pochodne cząstkowe dowolnego rzędu tak funkcji $v(p)$, jak też funkcji $w(p)$ i pochodne te są ciągłe, a nadto obie te funkcje są regularnie analityczne w otoczeniu każdego punktu, należącego do obszaru (D) lub do obszaru (D'). Funkcją potencjalną, albo krótko

---

[1]) Dr J. Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911 str. 25 wzór 17a. W dalszym ciągu pracę tę oznaczamy literą P.

[2]) Wynika to z założeń o krzywej (C) i wzorów (36), (55).

[3]) P. str. 22 wzór A_2.

potencjałem, określonym w pewnym danym obszarze (otwartym lub zamkniętym) nazywamy taką funkcję $f(p)$, która posiada pierwsze pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ i drugie pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ określone jednoznacznie w każdym punkcie danego obszaru i która nadto w każdym punkcie tego obszaru czyni zadość równaniu $\Delta f = 0$.

W przypadku, gdy dany obszar jest położony w skończoności, funkcja potencjalna nazywa się regularna i obszar, w którym a funkcja jest zdefiniowana, nazywa się regularny, jeśli pochodne pierwszego rzędu są ciągłe jednostajnie w tym obszarze i jeśli istnieją pochodne rzędu drugiego $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ całkowalne.

Przypuśćmy, że dany obszar rozciąga się nieograniczenie i że nadto obszar, który rozciąga się do koła o promieniu dowolnie dużym, jest regularny, to obszar ten jest regularny w nieskończoności (i wogóle regularny), a funkcja $f(p)$ jest funkcją potencjalną regularną w nieskończoności (i wogóle regularną w danym obszarze), jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\lim_{R=\infty} f(p) = c \text{ [1]}$$

$$\lim_{R=\infty} R \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \lim_{R=\infty} R \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

przyczem c oznacza stałą w zupełności określoną, a R jest to odległość początku spółrzędnych od punktu p.

Jeżeli dla dostatecznie dużych R funkcja $f(p)$ da się przedstawić w formie:

$$f(p) = m \log \frac{1}{R} + \varphi(p)$$

gdzie m jest stałą, a $\varphi(p)$ jest funkcją potencjalną, regularną w nieskończoności, to m nazywa się masą, od której potencjał $f(p)$ pochodzi.

Stosując powyższą definicję do potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej, dochodzimy do wniosku:

5°) Potencjał warstwy pojedynczej i podwójnej jest funkcją potencjalną, regularną w obszarze (D). Potencjał warstwy pojedynczej jest funkcją potencjalną, regularną w obszarze (D'), jeśli:

[1]) P. str. 3 § 2.

$$m = \int \mu(t)\, dt = 0$$

Potencjał warstwy podwójnej jest funkcją potencjalną regularną w obszarze (D').

W teorji potencjału ważne zastosowanie ma:

I. Twierdzenie Greena.[1])

Oznaczmy przez $U(p)$ i $W(p)$ funkcje, posiadające pierwsze pochodne ciągłe jednostajnie w obszarze (D), a drugie pochodne $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ w zupełności określone i całkowalne w tym obszarze. Uważajmy nadto normalną w dowolnie obranym punkcie krzywej (C) jako oś, skierowaną do wnętrza.

W takim razie:

$$\iint\limits_{(D)} \left\{\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}\right\} dx dy + \iint\limits_{(D)} \left\{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right\} dx\, dy =$$

$$= -\int\limits_{(C)} U \frac{dW}{dn_+} ds$$

przyczem całka krzywolinjowa wzdłuż krzywej (C) jest wzięta w kierunku dodatnim, to jest takim, że styczna po obrocie o $\frac{\pi}{2}$ ma kierunek zgodny z kierunkiem normalnej. Przy pomocy wzoru Greena można udowodnić następujące twierdzenia:

II. Twierdzenie. Jeżeli funkcje $U(p)$ i $W(p)$ są funkcjami potencjalnemi, regularnemi w obszarze (D), to wówczas:

$$\int\limits_{(C)} \left(W\frac{dU}{dn_+} - U\frac{dW}{dn_+}\right) ds = o$$

III. Twierdzenie. Każda funkcja ciągła $\mu(s)$, która czyni zadość warunkom:

(3) $$\int\limits_0^l\int\limits_0^l \log r_{st}\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt = 0$$

---

[1]) P. str. 5 § 3.

$$\int_0^l \mu(t)\, dt = 0$$

równa się identycznie zeru.

Aby to wykazać, zwróćmy uwagę, że $v(p) = -\int\limits_{(C)} \log r_{sp} \mu(s) ds$ jest potencjałem warstwy pojedynczej, a zatem na podstawie pierwszego ze wzorów (1) można całkę (3) przedstawić w formie:

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} v(t) \left\{\frac{dv}{dn_+} - \frac{dv}{dn_-}\right\} dt = \int_0^l \int_0^l \log r_{st}\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt.$$

Zastosujmy teraz wzór Greena do obszaru (D), przyjmując $U(p) = W(p) = v(p)$, a następnie do obszaru, zawartego między krzywą (C), a kołem o promieniu R, dostatecznie dużym.

Jeżeli przyjmiemy w obu wypadkach normalną jako oś, skierowaną do wnętrza obszaru (D), to uwzględniając wzór Greena i własność 1⁰) potencjału warstwy pojedynczej, znajdziemy w granicy, gdy promień R rośnie nieograniczenie:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \int\limits_{(C)} v(t) \left\{\frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+}\right\} dt$$

przyczem całka, znajdująca się po lewej stronie, jest rozciągnięta na całą płaszczyznę xy.

Z ostatniego związku na podstawie (4) wynika, że:

$$(5) \qquad \iint \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -2\pi \int_0^l \int_0^l \log r_{st}\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt.$$

Aby zatem warunek (3) był spełniony, musi zachodzić identyczność: $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. Stąd wnosimy, że potencjał $v(p)$ jest stały wewnątrz krzywej (C) i na zewnątrz krzywej (C), a ponieważ znika w nieskończoności i jest ciągły w całej płaszczyźnie xy, więc znika identycznie, co jest tylko wówczas możliwe na podstawie pierwszego wzoru (1), jeśli $\mu(s)$ równa się identycznie zeru.

IV. T w i e r d z e n i e. Każda funkcja $\mu(s)$ ciągła i czyniąca zadość warunkom:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\int \mu(t)\,dt = 0 \\ &\int\limits_{(C)} \log r_{st}\,\mu(t)\,dt = 0 \end{aligned}$$

równa się identycznie zeru.

Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że z identyczności (6) wynika natychmiast związek (3), a stąd na podstawie twierdzenia poprzedzającego: $\mu(s) \equiv 0$.

V. Twierdzenia Plemelja.[1]) Funkcja:

$$\int\limits_{(C)} \log r_{su} \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(u) - y(t)}{x(u) - x(t)} du$$

jest funkcją symetryczną zmiennych s i t. Ze względu na ważne zastosowanie tego twierdzenia, podajemy jego dowód.

W tym celu kładziemy we formule:

$$\int\limits_{(C)} \left\{ U \frac{dW}{dn_+} - W \frac{dU}{dn_-} \right\} ds = 0$$

w miejsce funkcji U i W:

$$U(p) = \log r_{pq_1} \qquad W(p) = \log r_{pq_2}$$

Jako obszar wewnętrzny przyjmujemy obszar (D), albo obszar ograniczony krzywą (C) i kołem o promieniu R, dostatecznie dużym. W obu wypadkach punkty q_1 i q_2 są zewnętrzne. Całka krzywolinjowa, wzięta wzdłuż obwodu koła zmierza do zera, gdy promień R rośnie nieograniczenie. Uwzględniając tę okoliczność i wzór następujący:

$$\frac{d}{dn} \log r_{sq} = - \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(q)}{x(s) - x(q)}$$

oraz wprowadzając oznaczenie:

$$g(q_1 q_2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(C)} \log r_{q_1 t} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(t) - y(q_2)}{x(t) - x(q_2)} dt$$

znajdujemy:

$$g(q_1 q_2) = g(q_2 q_1)$$

[1]) P. str. 27 § 13.

Jeżeli przyjmiemy, że punkt q_2 jest stały, to funkcja $g(q_1 q_2)$ przedstawia potencjał warstwy pojedynczej, jeżeli zaś punkt q_1 jest stały, to $g(q_1 q_2)$ przedstawia potencjał warstwy podwójnej. Ponieważ potencjał warstwy pojedynczej jest ciągły w całej płaszczyźnie a potencjał warstwy podwójnej czyni zadość związkom (2), więc mamy:

$$g(ts_+) = g(st_+)$$
$$g(ts_-) = g(st_-)$$

Dodając te dwie równości i dzieląc przez dwa, znajdziemy ostatecznie:

$$g(st) = g(ts).$$

skąd wynika natychmiast słuszność twierdzenia Plemelja. Główne zagadnienia teorji potencjału są następujące:

I. Problemat Robina-Poincarego.

Dana jest ciągła funnkcja $f(s)$, zależna od parametru s t. j. długości łuku krzywej (C). Udowodnić istnienie potencjału warstwy pojedynczej $v(p)$, który w każdym punkcie ograniczenia (C) czyni zadość równaniu:

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_-} - \frac{1-\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_+} = f(s) \tag{7}$$

przyczem λ oznacza dowolny parametr. Nadto zbadać własności funkcji $v(p)$, uważanej jako funkcja zmiennej zespolonej λ.

II. Problemat Neumana-Poincarego.

Udowodnić istnienie potencjału warstwy podwójnej $w(p)$, który w każdym punkcie ograniczenia (C) czyni zadość równaniu:

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda} w_+(s) - \frac{1-\lambda}{2\lambda} w_-(s) = f(s) \tag{8}$$

i zbadać własności funkcji $w(p)$, uważanej jako funkcja zmiennej zespolonej λ.

Równania całkowe.

A. Jądra ogólne.

Oznaczmy przez $K(st)$ funkcję zmiennych s i t, kwadratowo całkowalną i ciągłą z wyjątkiem ewentualnie odcinka $s = t$, a okre-

śloną w obszarze $(a \leqq {s \atop t} \leqq b)$. Funkcję tę w dalszym ciągu będziemy nazywali „jądrem". Niech $f(s)$ oznacza funkcję ciągłą zmiennej s, określoną w przedziale $(a \leqq s \leqq b)$.

Równania:

$$(9) \qquad \begin{cases} f(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt \\ f(s) = \psi(s) + \lambda \int_a^b K(ts)\, \psi(t)\, dt \end{cases}$$

nazywają się równaniami całkowemi, ze sobą sprzężonemi Funkcje $f(s)$ i $K(st)$ są dane funkcje zaś $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ są funkcjami szukanemi; λ oznacza dowolny parametr. Istnieje pewna funkcja $K(\lambda; st)$, zależna od parametru λ i zmiennych s i t, która nazywa się „funkcją rozwiązującą" a którą wyznacza w zupełności jądro $K(st)$. jak to zobaczymy niżej. Zapomocą funkcji rozwiązującej można rozwiązać równania (9) przy dowolnie zadanej funkcji $f(s)$. Funkcja rozwiązująca jest funkcją ciągłą zmiennych s i t w każdym punkcie, w którym jądro $K(st)$ jest ciągłe, ze względu zaś na parametr λ jest funkcją meromorficzną w całej zespolonej płaszczyźnie λ. Funkcja $K(\lambda; st)$ da się przedstawić w formie:

$$K(\lambda; st) = \frac{D(\lambda; st)}{D(\lambda)} \; {}^{1)}$$

przyczem $D(\lambda; st)$ i $D(\lambda)$ są to całkowite funkcje parametru λ. Można zatem położyć: [2])

$$D(\lambda; st) = a_0(st) + \frac{\lambda}{1} a_1(st) + \ldots \; \frac{\lambda^n}{n!} a_n(st) + \ldots$$

$$(10) \qquad D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1} a_1 + \ldots \; \frac{\lambda^n}{n!} a^n + \ldots$$

gdzie:

$$a_0(st) = K(st)$$

---

[1]) Tr. Lalesco. Introduction a la Théorie des Equations Intégrales. Paris 1912. str. 27 wzór ostatni. W dalszym ciągu książkę tę oznaczamy literą L.

[2]) L. str 28 wzór 17.

$$a_n(st) = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(st) & K(t_1 t) & \dots & K(t_n t) \\ K(st_1) & K(t_1 t_1) & \dots & K(t_n t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(st_n) & K(t_1 t_n) & \dots & K(t_n t_n) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

$$(11) \quad \left| \begin{aligned} a_1 &= \int_a^b K(tt)\, td \\ a_n &= \underbrace{\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1 t_1) & K(t_2 t_1) & \dots & K(t_n t_1) \\ K(t_1 t_2) & K(t_2 t_2) & \dots & K(t_n t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_1 t_n) & K(t_2 t_n) & \dots & K(t_n t_n) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 \dots dt_n \end{aligned} \right.$$

Ponieważ funkcja rozwiązująca jest ilorazem dwu funkcji całkowitych, zależnych od parametru λ, więc oczywiście funkcja ta posiada jako punkty osobliwe te wartości na parametr λ, które $D(\lambda)$ obracają w zero. Wartości te będziemy nazywali „wartościami charakterystycznemi“, a wiadomem jest o tych wartościach że tworzą one mnogość przeliczalną z jedynem punktem skupienia w nieskończoności, jak to wynika z teorji funkcji analitycznych. O ile na λ nie przyjmujemy wartości charakterystycznych, to funkcja rozwiązująca czyni zadość następującym związkom:

$$K(\lambda; st) + \lambda \int_a^b K(su)\, K(\lambda; ut)\, du = K(st)$$

$$K(\lambda; st) + \lambda \int_a^b K(\lambda; su)\, K(ut)\, du = K(st)$$

skąd wynika także, że rozwiązanie powyższych równań zapomocą funkcji zależnej od dowolnego parametru λ i zmiennych s i t jest jednoznacznie określone.

VI. Twierdzenie Fredholma.[1]) Równania (9) posiadają odpowiednio następujące rozwiązanie:

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(\lambda; st)\, f(t)\, dt$$

[1]) L. str. 27 § 8

$$\psi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b f(t)\, K(\lambda; ts)\, dt$$

dla każdej wartości na parametr λ, różnej od którejkolwiek z wartości charakterystycznych i dla każdej ciągłej funkcji $f(s)$. Z wartościami charakterystycznemi łączą się ściśle równania całkowe tak zwane „jednorodne“ kształtu:

$$\varphi_0(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \varphi_0(t)\, dt = 0$$

$$\psi_0(s) + \lambda_0 \int_a^b K(ts)\, \psi_0(t)\, dt = 0$$

przyczem przez λ_0 oznaczyliśmy jedną z wartości charakterystycznych, a przez $\varphi_0(s)$ i $\psi_0(s)$ szukane funkcje. W odróżnieniu od tych równań, równania (9) zwą się równaniami całkowemi niejednorodnemi. [1])

Oznaczmy: [2])

$$f\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \dots s_n \\ t_1 & t_2 \dots t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1 t_1) & K(s_2 t_1) \dots & K(s_n t_1) \\ K(s_1 t_2) & K(s_1 t_2) \dots & K(s_n t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_1 t_n) & K(s_2 t_n) \dots & K(s_n t_n) \end{vmatrix}$$

$$D\left(\lambda; \begin{matrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ t_1 t_2 \dots t_n \end{matrix}\right) = f\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ t_1 t_2 \dots t_n \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{1} \int_a^b f\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n & u \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n & u \end{pmatrix} du +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b f\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \dots s_n & u_1 & u_2 \\ t_1 & t_2 \dots t_n & u_1 & u_2 \end{pmatrix} du_1\, du_2 + \dots$$

Przypuśćmy, że λ_0 jest pierwiastkiem równania $D(\lambda) = 0$ wielokrotności n; w takim razie λ_0 musi być biegunem funkcji rozwiązującej, gdyż zachodzi związek: [3])

---

[1]) Przypuszczamy zawsze, że $f(s)$ nie znika identycznie, gdyż, jeśli $f(s) \equiv 0$, a λ nie jest wartością charakterystyczną, to $\varphi(s) \equiv \psi(s) \equiv 0$.

[2]) P. str. 32 wzór (η) i (ϑ).

[3]) P. str. 33 wzór (c).

$$\frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n} = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} D\left(\lambda; \begin{matrix} u_1 \ldots u_n \\ u_1 \ldots u_n \end{matrix}\right) du_1\, du_2 \ldots du_n$$

Niech rząd tego bieguna będzie m. W otoczeniu bieguna λ_0, funkcja rozwiązująca da się zatem przedstawić w kształcie: [1])

$$K(\lambda; st) = \frac{h_m(st)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{h_{m-1}(st)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \ldots \frac{h_1(st)}{\lambda - \lambda_0} + P(\lambda; st)$$

przyczem funkcja $h_m(st)$ na pewne nie znika identycznie, a funkcja $P(\lambda; st)$ ze względu na parametr λ jest szeregiem potęgowym, zbieżnym w kole którego środek leży w λ_0 i którego promień równa się odległości bieguna λ_0 od najbliższego bieguna funkcji rozwiązującej.

Wprowadźmy następujące określenia: [2])

1⁰) D w a j ą d r a $K_1(st)$ i $K_2(st)$ kwadratowo całkowalne i ciągłe w każdym punkcie obszaru $\left(a \leqq \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \leqq b\right)$ — z wyjątkiem ewentualnie odcinka $s = t$ — są „o r t o g o n a l n e" albo „n a w p ó ł o r t o g o n a l n e" zależnie od tego, czy zachodzą obie, czy tylko jedna z nastąpujących tożsamości:

$$\int_a^b K_1(su)\, K_2(ut)\, du \equiv 0$$

$$\int_a^b K_2(su)\, K_1(ut)\, du \equiv 0$$

2⁰) Z b i ó r f u n k c j i c i ą g ł y c h w przedziale (a, b):

$$\Phi_1(s)\, \Phi_2(s) \ldots \quad \Phi_n(s) \ldots$$
$$\Psi_1(s)\, \Psi_2(s) \ldots \quad \Psi_n(s) \ldots$$

t w o r z y tak zwany s y s t e m b i o r t o g o n a l n y, jeśli czyni zadość następującym warunkom:

$$\int_a^b \Phi_p(s)\, \Psi_q(s)\, ds = \delta_{pq}$$

---

[1]) L. str. 44. wzór 15.

[2]) L. str. 40 § 4.

przyczem $\delta_{pq} = 0$, jeśli $p \neq q$, albo też równa się $+1$, jeśli $p = q$.

3°) Wyrażenie:

$$H(0; st) = \frac{h_m(st)}{(-\lambda_0)^m} + \ldots + \frac{h_1(st)}{-\lambda_0}$$

nazywa się częścią jądra $K(st)$, odnoszącą się do bieguna λ_0, a:

$$H(\lambda; st) = \frac{h_m(st)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \ldots + \frac{h_1(st)}{\lambda - \lambda_0} \tag{12}$$

jest funkcją rozwiązującą jądra $H(0; st)$.

4°) Jądro (12) nazywa się jądrem kanonicznem[1]) rzędu m, jeśli istnieje $m-1$ stałych $a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}$, różnych od zera i taki układ biortogonalny

$$\Phi_1(s) \ldots \Phi_m(s)$$

$$\Psi_1(s) \ldots \Psi_m(s)$$

iż zachodzą związki:

$$h_1(st) = \sum_{p=1}^{m} \Phi_p(s)\, \Psi_p(t)$$

$$h_2(st) = \sum_{p=1}^{m-1} a_p\, \Phi_p(s)\, \Psi_{p+1}(t)$$

$$h_3(st) = \sum_{p=1}^{m-2} a_p\, a_{p+1}\, \Phi_p(s)\, \Psi_{p+2}(t).$$

. . . .

$$h_m(st) = a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}\, \Phi_1(s)\, \Psi_m(t).$$

Przy tych określeniach można wysłowić następujące twierdzenia:

VII. Twierdzenie. Jądro $H(o, st)$ jest ortogonalne do jądra $P(o; st)$, które nie posiada już λ_0 jako wartości charakterystycznej.

VIII. Twierdzenie. W przypadku, gdy jądro $H(o; st)$ jest kanoniczne, mamy:

---

[1]) L. str. 55 § 10.

$$\Phi_1(s) + \lambda_0 \int_a^b H(o; st)\, \Phi_1(t)\, dt = 0$$

$$\Psi_m(s) + \lambda_0 \int_a^b \Psi_m(t)\, H(o; ts)\, dt = 0$$

i równocześnie:

$$\Phi_1(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \Phi_1(t)\, dt = 0$$

$$\Psi_m(s) + \lambda_0 \int_a^b \Psi_m(t)\, K(ts)\, dt = 0.$$

Funkcje $\Phi_1(s)$, $\Psi_m(s)$ nazywają się „funkcjami charakterystycznemi“, należącemi do wartości charakterystycznej λ_0. One stanowią parę rozwiązań równań całkowych jednorodnych, ze sobą sprzężonych.

IX. Twierdzenie. W przypadku ogólnym jądro $H(o; st)$ jest sumą skończonej liczby jąder kanonicznych, między sobą ortogonalnych. Możemy więc położyć:

$$H(o; st) = H^{(1)}(st) + \ldots H^{(r)}(st))$$

przyczem $H^{(p)}(st)$ $(p = 1, 2 \ldots r)$ jest jądrem kanonicznem rzędu m_p. Mamy:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$$

Ponieważ każde z jąder kanonicznych dostarcza jedną parę rozwiązań równań całkowych jednorodnych, ze sobą sprzężonych, a tych jąder jest r, więc istnieje r par rozwiązań. Liczba r nazywa się stopniem wartości charakterystycznej λ_0. Rząd wartości charakterystycznej λ_0 równa się największej z liczb $m_1\, m_2 \ldots m_r$.

Z powyższych twierdzeń wynika:

X. Twierdzenie Fredholma[1]). Jeżeli λ_0 jest wartością charakterystyczną stopnia r, to równania całkowe jednorodne:

$$\Phi(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \Phi(t)\, dt = 0$$

[1]) L. str. 59. § 13.

$$\Psi(s) + \lambda_0 \int_a^b \Psi(t)\, K(t\, s)\, dt = 0$$

posiadają dokładnie r par rozwiązań, przyczem r rozwiązań Φ i r rozwiązań Ψ są linjowo od siebie niezależne. Każde inne rozwiązanie tego układu równań wyraża się linjowo zapomocą funkcji Φ, względnie Ψ.

XI. Twierdzenie [1]. Funkcje Φ i Ψ tworzą system biortogonalny wtedy i tylko wtedy, jeśli rząd wartości charkterystycznej równa się jedności.

XII. Twierdzenie Fredholma [2]. Równanie całkowe niejednorodne:

$$\varphi(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, jeżeli funkcja $f(s)$ czyni zadość warunkom:

$$\int_a^b f(s)\, \Psi(s)\, ds = 0$$

dla wszystkich Ψ, należacych do λ_0. Podobnie równanie całkowe:

$$\Psi(s) + \lambda_0 \int_a^b K(ts)\, \Psi(t)\, dt = f(s)$$

posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, jeśli:

$$\int_a^b f(s)\, \Phi(s)\, ds = 0,$$

dla wszystkich Φ, należących do λ_0.

XIII. Twierdzenie Goursata [3]. Jeżeli jądra $K_1(st)$ i $K_2(st)$ są ortogonalne, albo nawpółortogonalne, to zbiór wartości charakterystycznych, należących do jądra $K_1(st) + K_2(st)$ jest utworzony ze sumy zbioru wartości charakterystycznych, należących do

---

[1] L. str. 58 § 11.

[2] L. str. 61 § 14.

[3] L. str. 40 § 4.

jądra K_1 i zbioru wartości charakterystycznych, należących do jądra K_2. Nadto funkcja rozwiązująca jądra $K_1(st)+K_2(st)$, równa się sumie funkcji rozwiązujących, należących do jąder $K_1(st)$ i $K_2(st)$ — jednak tylko wówczas, gdy jądra są ortogonalne.

XIV. Twierdzenie. Istnieją jądra, które posiadają wartości charakterystyczne i istnieją takie jądra, które ich nie posiadają. Aby to wykazać wystarczy podać przykłady. Otóż jądro $K(st)$, równe stałej (różnej od zera) posiada jedną wartość charakterystyczną, jak to wynika z rozwinięcia (10). Podobnie jądro $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$ posiada wartości charakterystyczne, jak to wykażemy w rozdziale III. Inny przykład mamy, przyjmując:

$$K(st)=u_1(s)\,v_1(t)+u_2(s)\,v_2(t)+\ldots u_n(s)\,v_n(t), \tag{13}$$

gdzie $u_k(s), v_k(t)$ $(k=1,2\ldots n)$ są funkcjami ciągłemi, określonemi w przedziale (a,b). Jądro (13) może posiadać tylko skończoną ilość wartości charakterystycznych, gdyż wszystkie a_k dla $k>n$ równają się zeru, a zatem rozwinięcie (10) na $D(\lambda)$ redukuje się do wielomianu. Wynika to natychmiast ze wzoru (11), jeżeli zwrócimy uwagę na to, że wyznaczniki pod znakiem całkowym stopnia $k>n$ znikają. Jeżeli więc w tym wypadku przynajmniej jedno a_k $(k=1,2\ldots n)$ jest od zera odmienne, to jądro (13) posiada wartości charakterystyczne, w przeciwnym razie wyrażenie $D(\lambda)$ jest identycznie równe jedności i wtedy jądro (13) nie posiada oczywiście żadnej wartości charakterystycznej. Ten ostatni wypadek zachodzi dla jądra: [1])

$$K(st)=A(s)\,.\,B(t)$$

gdzie funkcje $A(s), B(s)$ są ciągłe w przedziale (a,b) i takie, że

$$\int_a^b A(s)\,.\,B(s)\,ds=0.$$

B. Jądra symetryczne.

Niech będzie dana funkcja $K(st)$, o której zakładamy:

1°) Funkcja $K(st)$ jest symetryczna względem zmiennych s i t, to znaczy, że $K(st)=K(ts)$.

2° Funkcja $K(st)$ jest ciągła w każdym punkcie obrazu $\left(a \leqq {s \atop t} \leqq b\right)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s=t$. Jeżeli ta nieciągłość

---

[1]) L. str. 62 § 17.

ma miejsce, to w takim razie $|s-t|^{\alpha}|K(st)|$ jest ograniczone, przyczem liczba α czyni zadość nierówności $o < \alpha < \frac{1}{2}$ i jest niezależna od zmiennych s i t. Jeżeli funkcję $K(st)$ przyjmiemy jako jądro równania całkowego, to w takim razie równania (9) redukują się do jednego równania całkowego:

$$(14) \qquad f(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt.$$

Funkcja rozwiązująca $K(\lambda; st)$, należąca do jądra symetrycznego jest również funkcją symetryczną zmiennych s i t.

XV. Twierdzenie Hilberta[1]). W przypadku jądra symetrycznego istnieć musi przynajmniej jedna wartość charakterystyczna, a nadto wartości charakterystyczne są rzeczywiste i rzędu pierwszego.

Jądro $K(st)$ jest „zamknięte", jeśli nie można wyznaczyć takiej funkcji $g(s)$, różnej od zera, aby spełniona była identyczność:

$$(15) \qquad \int_a^b K(st)\, g(t)\, dt = 0,$$

i aby przytem istniała całka $\int_a^b g^2(s)\, ds$ od zera odmienna.

XVI. Twierdzenie Hilberta[2]). Jądro zamknięte musi posiadać nieskończenie wiele wartości charakterystycznych.

Dowód. Gdyby jądro $K(st)$ posiadało skończoną liczbę wartości charakterystycznych, mielibyśmy:

$$K(st) = \frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

gdzie $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_n$ są wartości charakterystyczne, a $\varphi_1(s) \dots \varphi_n(s)$ odpowiadające im funkcje charakterystyczne. Jeżeli do układu funkcji $\varphi_1(s) \dots \varphi_n(s)$ dołączymy dowolną funkcję $f(s)$, linjowo od nich niezależną i kwadratowo całkowalną i położymy:

$$\varphi_{n+1}(s) = f(s) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s) \,.\int_a^b f(s)\, \varphi_k(s)\, ds.$$

---

[1]) Dawid Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1904. Heft 1. str 72. Satz 3. W dalszym ciągu pracę tę oznaczamy D. H.

[2]) D. H. str. 74 pierwsze zdanie z góry.

to znajdziemy:

$$\varphi_{n+1}(s) \neq 0$$

$$\int_a^b K(st)\, \varphi_{n+1}(s)\, ds \equiv 0$$

wbrew założeniu.

Jądro $K(st)$ nazywa się „co do znaku oznaczone“ albo krótko „oznaczone“, jeżeli nie istnieje funkcja $g(s)$ kwadratowo całkowalna, od zera odmienna i taka, aby:

(16) $$\int_a^b \int_a^b K(st)\, g(s)\, g(t)\, ds\, dt = 0.$$

XVII. Twierdzenie [1]. Jądro oznaczone jest zamknięte i posiada wartości charakterystyczne tego samego znaku.

C. Jądra, dające się usymetrycznić.

Niech będzie dane jądro $K(st)$, różne od zera, ciągłe w każdym punkcie obszaru $\left(a \leqq {s \atop t} \leqq b\right)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$ i nadto ograniczone w tym obszarze. Jądro takie da się usymetrycznić, jeśli istnieje takie oznaczone jądro $N(st)$, że przynajmniej jedna z funkcji:

$$H_1(st) = \int_a^b K(su)\, N(ut)\, du$$

$$H_2(st) = \int_a^b N(su)\, K(ut)\, du$$

jest symetryczna.

Funkcje $H_1(st)$ i $H_2(st)$ nie mogą znikać identycznie, co wynika z tego faktu, że jądro $N(st)$ jest oznaczone.

XVIII. Twierdzenie Marty.[2] Jądro $K(st)$, dające się usymetrycznić posiada następującą własność:

---

[1]) L. str. 70 § 8.

[2]) L. str. 78 § 14 i § 15.

Jeżeli λ_0 jest wartością charakterystyczną. a $\varphi_0(s)$ funkcją charakterystyczną równania całkowego:

$$(17) \qquad \varphi_0(s) + \lambda_0 \int_a^b K(su)\, \varphi_0(u)\, du = 0$$

to wówczas:

$$(18) \qquad \psi_0(s) = \int_a^b N(s, u)\, \varphi_0(u)\, du$$

jest funkcją charakterystyczną równania całkowego, z niem sprzężonego.

XIX. Twierdzenie (pomocnicze).[1]) Dla dowolnych funkcji ciągłych $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ w przedziale $(0 \leqq s \leqq l)$ i czyniących zadość warunkom:

$$(19) \qquad \int \varphi(s)\, ds = \int \psi(s)\, ds = 0$$

zachodzi nierówność:

$$(20) \qquad \left[\int\int \log r_{st}\, \varphi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt\right]^2 \leqq \int\int \log r_{st}\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt \,.$$
$$. \int\int \log r_{st}\, \psi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt$$

Dowód. Dla dowolnego λ i dowolnych funkcji ciągłych $\varphi(s)$ i $\psi(s)$, czyniących zadość warunkom (19) ma miejsce na podstawie wzoru (5), jedno z nierówności:

$$\int\int \log r_{st}\, [\varphi(s) + \lambda\, \psi(s)] . [\varphi(t) + \lambda\, \psi(t)]\, ds dt > 0$$
$$\int\int \log r_{st}\, [\varphi(s) + \lambda\, \psi(s)] . [\varphi(t) + \lambda\, \psi(t)]\, ds dt < 0.$$

Stąd:

$$\left[\int\int \log r_{st}\, \varphi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt + \int\int \log r_{st}\, \psi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt\right]^2 \gtrless$$
$$4 \int\int \log r_{st}\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds dt . \int\int \log r_{st}\, \psi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt.$$

Jeśli uwzględnimy, że:

---

[1]) C. Marty C. R. 150 str. 515, 1910. — (U Marty w miejsce funkcji $\log r_{st}$ figuruje jądro oznaczone. Stąd u nas jeszcze dodatkowy warunek (19)).

$$\int\int \log r_{st}\, \varphi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt = \int\int \log r_{st}\, \psi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt,$$

znajdziemy nierówność (20). Nierówność ta zachodzi dla wszelkich funkcji ciągłych $\varphi(s)$ i $\psi(s)$, spełniających warunki (19), a nazywać ją będziemy uogólnioną nierównością Schwarza. Niech będzie dana funkcja $A(st)$, ciągła w każdym punkcie obszaru $(0 \leqq {s \atop t} \leqq l)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$, i przytem ograniczona w tym obszarze. Niech nadto funkcja $A(st)$ spełnia warunki:

(21) $$\int A(st)\, ds \equiv 0$$

(22) $$\int \log r_{su}\, A(ut)\, du = \Phi_1(st)$$

gdzie $\Phi_1(st)$ jest funkcją symetryczną zmiennych s i t. Przy tych założeniach co do funkcji $A(st)$, można wysłowić następujące twierdzenie:

XX. Twierdzenie.[1] Jądro $A(st)$ musi posiadać przynajmniej jedną wartość charakterystyczną.

Dowód. Połóżmy:

(23) $$\begin{cases} A^{(1)}(st) = A(st) \\ A^{(p)}(st) = \int A(su)\, A^{(p-1)}(ut)\, du \\ \Phi_p(st) = \int \log r_{su}\, A^{(p)}(ut)\, du \end{cases} \quad (p = 2, 3 \ldots)$$

Funkcje $A^{(p)}(st)$ $(p \geqq 2)$ nazywają się iteracjami rzędu p jądra $A(st)$, są ciągłe i posiadają tę własność, że:

$$A^{(\mu+\nu)}(st) = \int A^{(\mu)}(su)\, A^{(\nu)}(ut)\, du$$

(24) $$\int A^{(p)}(t\, s)\, dt \equiv 0 \quad (p = 1, 2 \ldots)$$

Funkcje $\Phi_p(st)$ są funkcjami ciągłemi i posiadają następujące własności:

---

[1]) M. J. Marty C. R. t. 150 str. 1031 i 1499 przy nieco odmiennych założeniach, niż te, które przyjęliśmy o funkcji $A(st)$.

1) F u n k c j a $\Phi_p(st)$ są s y m e t r y c z n e względem zmiennych s i t. $\Phi_1(st)$ jest funkcją symetryczną według założenia (związek 22). Przypuśćmy, że $\Phi_p(st)$ jest funkcją symetryczną; udowodnimy, że funkcja $\Phi_{p+1}(st)$ musi być też funkcją symetryczną.

Mamy na podstawie (23):

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{su}\, A^{(p)}(uz)\, A(zt)\, du\, dz.$$

Ponieważ

$$\Phi_p(st) = \int \log r_{su}\, A^{(p)}(uz)\, du = \Phi_p(zs)$$

więc:

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{su}\, A^{(p)}(us)\, A(zt)\, du dz.$$

Ze symetrji $\log r_{zu}$ wynika w dalszym ciągu:

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{uz}\, A(zt)\, A^{(p)}(us)\, du\, dz$$

Uwzględniając wreszcie symetryczność funkcji $\Phi_1(ut)$, otrzymujemy:

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{tz}\, A(zu)\, A^{(p)}(us)\, du\, dz$$

$$= \int \log r_{tz}\, A^{(p+1)}(z, s)\, ds = \Phi_{p+1}(t\, s).$$

2) Z a c h o d z i n i e r ó w n o ś ć:

$$[\Phi_{2p}(ss)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(ss)\, \Phi_{2p-2}(ss)$$

dla każdej wartości na zmienną s, wybranej w przedziale (o, l) i dla każdego wskaźnika $p \geqq 2$.

Aby to udowodnić, uważajmy:

$$\Phi_{2p}(st) = \int\int \log r_{su}\, A^{(p+1)}(uz)\, A^{(p-1)}(zt)\, du\, dz$$

Ponieważ:

$$\Phi_{p+1}(sz) = \Phi_{p+1}(zs)$$

więc:

$$\Phi_{2p}(st) = \int\int \log r_{su}\, A^{(p+1)}(us)\, A^{(p-1)}(zt)\, du\, dz$$

Uwzględniając wzór (24) i kładąc w uogólnionej nierówności Schwarza:

$$\varphi(u) = A^{(p+1)}(us)$$
$$\psi(z) = A^{(p-1)}(zt)$$

otrzymujemy:

$$[\Phi_{2p}(st)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(ss) \, . \, \Phi_{2p-2}(tt)$$

a stąd przyjmując $s = t$:

(25) $$[\Phi_{2p}(ss)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(ss) \, \Phi_{2p-2}(ss).$$

3) Istnieje taka wartość $s = s_1$, iż dla wszystkich $p \geqq 2$ $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ jest od zera odmienne.

Wybierzmy na p wskaźnik stały większy lub równy 2. — W takîm razie $\Phi_{2p}(ss)$ jest różne od zera dla każdej wartości s, zawartej w przedziale (o, l), albo też dla pewnego $s = s_0$, $\Phi_{2p}(s_0 s_0)$ obraca się w zero.

Jeśli:

$$\Phi_{2p}(s_0 s_0) = \int\int \log r_{zu} \, A^{(p)}(zs_0) \, A^{(p)}(us_0) \, du\, dz = 0$$

to z uwagi na związek (24) i twierdzenie III, otrzymujemy:

(26) $$A^{(p)}(u s_0) \equiv 0$$

dla wszystkich wartości na u, zawartych w przedziale (o, l). Ze wzoru:

$$A^{(p+1)}(u s_0) = \int A(ut) \, A^{(p)}(ts_0) \, dt$$

po uwzględnieniu tożsamości (26) wynika:

$$A^{(p+1)}(us_0) \equiv 0.$$

Ponieważ jeden ze wskaźników p i $p+1$ jest parzysty, a więc równy 2μ, zatem:

$$\Phi_{2\mu}(s_0 s_0) = \int\int \log r_{zu} \, A^{(\mu)}(zs_0) \, A^{(\mu)}(us_0) \, du\, dz$$
$$= \int \log r_{s_0 u} \, A^{(2\mu)}(us_0) \, du = 0$$

Powtarzając dla $\Phi_{2\mu}(s_0 s_0) = 0$ to samo rozumowanie, które zastosowaliśmy dla $\Phi_{2p}(s_0 s_0) = 0$ dochodzimy do wniosku:

$$A^{(\mu)}(us_0) \equiv 0.$$

Jeżeli to rozumowanie dostateczną ilość razy powtórzymy, znajdziemy ostatecznie:

$$A(us_0) \equiv 0$$

dla wszelkich wartości na u, zawartych w przedziale (o, l). Ponieważ $A(us)$ nie równa się identycznie zeru dla wszystkich wartości na u i s w obszarze $(0 \leqq {s \atop u} \leqq l)$, więc istnieje takie $s = s_1$, że $A(us_1)$ nie równa się identycznie zeru dla wszystkich wartości na u, zawartych w przedziale (o, l). Stąd wynika w dalszym ciągu, że $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ jest od zera odmienne dla wszystkich $p \geqq 2$; gdyby bowiem $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ równało się zeru, musiałoby:

$$A(us_1) \equiv 0.$$

P r z e j d ź m y d o d o w o d u t w i e r d z e n i a XX.

Jeśli jądro $A(st)$ nie posiada wartości charakterystycznych, to funkcja rozwiązująca $K(\lambda; st)$ da się przedstawić w kształcie:

$$K(\lambda; st) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A^{(p+1)}(st) \tag{26}$$

przyczem szereg po prawej stronie jest funkcją całkowitą ze względu na parametr λ i jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w obszarze $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$.

Ze wzoru (26) i określenia funkcji $\Phi_p(st)$ wynika:

$$\int \log r_{su} K(\lambda; ut)\, du = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p . \int \log r_{su} A^{(p+1)}(ut)\, du$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \Phi_{p+1}(st).$$

Jeżeli zatem przyjmiemy $s = t = s_1$, gdzie s_1 jest wartością wyżej określoną, to szereg:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} \Phi_{\nu+1}(s_1 s_1)$$

przedstawia też funkcję całkowitą parametru λ.

Wynika stąd, że szereg:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{2p-1} \Phi_{2p}(s_1 s_1)$$

powinien też przedstawiać funkcję całkowitą. Udowodnimy, że tak nie jest. Rzeczywiście na podstawie nierówności (25) dla $s = s_1$, mamy:

$$|\Phi_{2p}(s_1 s_1)|^2 \leqq \Phi_{2p+2}(s_1 s_1) \,.\, \Phi_{2p-2}(s_1 s_1).$$

Stąd, ponieważ $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ odmienne od zera dla $p \geqq 2$:

$$\left|\frac{\Phi_{2p+2}(s_1 s_1)}{\Phi_{2p}(s_1 s_1)}\right| \geqq \left|\frac{\Phi_{2p}(s_1 s_1)}{\Phi_{2p-2}(s_1 s_1)}\right| > 0 \, (p \geqq 2),$$

a tem bardziej:

$$\left|\frac{\Phi_{2p+2}(s_1 s_1)}{\Phi_{2p}(s_1 s_1)}\right| \geqq \left|\frac{\Phi_{4}(s_1 s_1)}{\Phi_{2}(s_1 s_1)}\right| > 0 \, (p \geqq 2).$$

Z nierówności tej wynika, że szereg $\sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{2p-1} \Phi_{2p}(s_1 s_1)$ dla dostatecznie dużych λ jest szeregiem rozbieżnym, co nie mogłoby mieć miejsca, gdyby jądro $A(st)$ nie posiadało żadnej wartości charakterystycznej. Jądro $A(st)$ posiada zatem przynajmniej jedną wartość charakterystyczną.

Wniosek I. Jądro $A(st)$, które nie posiada żadnej wartości charakterystycznej, musi znikać identycznie.

D. Jądro, które jest pochodną funkcji symetrycznej, perjodycznej.

Niech będzie dana funkcja $K(st)$, posiadająca następujące własności:

1°) $K(st)$ jest funkcją symetryczną zmiennych s i t.

2°) $K(st)$ jest względem s i t funkcją perjodyczną, to jest:

istnieje taka liczba l różna od zera, że dla dowolnych całkowitych k i k' zachodzi identyczność:

$$K(s+kl, t+k'l) \equiv K(st).$$

3[0]) $K(st)$ posiada ciągłe pochodne pierwszego rzędu: $\frac{\partial K(st)}{\partial s}$, $\frac{\partial K(st)}{\partial t}$ w każdym punkcie obszaru $\left(o \leq {s \atop t} \leq l\right)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s=t$; nadto pochodne te są ograniczone w całym obszarze.

XXI. Twierdzenie.[1]) Jeżeli równanie całkowe:

$$\varphi(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \varphi(t)\, dt = 0 \tag{27}$$

$$\psi(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial t} \psi(t)\, dt = 0 \tag{28}$$

posiadają wartości charakterystyczne, to w takim razie te wartości charakterystyczne leżą symetrycznie ze względu na punkt zerowy płaszczyzny zespolonej λ.

Dowód. Zcałkujmy równanie (27) od o do s i połóżmy:

$$\chi(s) = \int_o^s \varphi(s)\, ds - \lambda \int K(ot)\, \varphi(t)\, dt, \tag{29}$$

to w takim razie:

$$\chi(s) + \lambda \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0. \tag{30}$$

Połóżmy w ostatniej równości w miejsce $s : s+kl$.

Znajdziemy:

$$\chi(s+kl) + \lambda \int K(s+kl, t)\varphi(t)\, dt = 0,$$

albo na podstawie założenia 2[0]) o funkcji $K(st)$:

$$\chi(s+kl) + \lambda \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0. \tag{31}$$

---

[1]) To ogólne tw. figuruje u Plemelja tylko w odniesieniu do jądra $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$. P. str. 85 § 34. - Wzory (33) i (34) u Plemelja nie figurują.

Ze związków (30) i (31) wynika, że funkcja $\chi(s)$ jest perjodyczna.

Zauważmy na podstawie (29), że $\chi'(s) = \varphi(s)$, to przez całkowanie przez części otrzymamy ze związku (30):

$$\chi(s) - \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \chi(t)\, dt = 0$$

Ostatnie równanie uczy, że $-\lambda$ musi być wartością charakterystyczną, jeżeli $+\lambda$, jest wartością charakterystyczną.

Ten sam rezultat można otrzymać jeszcze inną drogą, ale przy mniej ogólnych założeniach co do funkcji $K(st)$. Przyjmijmy mianowicie, że funkcja $K(st)$ spełnia warunki 1^0) i 2^0) a nadto następujący:

3^0) $K(st)$ posiada ciągłe pochodne pierwszego rzędu $\frac{\partial K(st)}{\partial s}$, $\frac{\partial K(st)}{\partial t}$ i drugą pochodną $\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial K(st)}{\partial t}\right]$ ciągłą w każdym punkcie obszaru $\left(o \leqq {s \atop t} \leqq l\right)$, z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$; nadto pochodna ta jest ograniczona w danym obszarze.

Uwzględniając tę okoliczność, że $\psi(s)$ jest funkcją perjodyczną, otrzymujemy z (28) przez całkowanie przez części:

$$\psi(s) - \lambda \int K(st)\, \psi'(t)\, dt = 0.$$

Stąd przez wzięcie pochodnej:

$$\psi'(s) - \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \psi'(t)\, dt = 0$$

Z tego równania otrzymujemy ten sam rezultat, co i z równania (32).

Przyjmując ogólniejsze założenia co do funkcji $K(st)$, można otrzymany rezultat wyrazić w następujących związkach:

Jeżeli:

$$(33) \qquad \left|\begin{array}{l} \varphi'(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \varphi'(t)\, dt = 0 \\ \psi(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial t} \psi(t)\, dt = 0 \end{array}\right.$$

to:

$$(34)\qquad \begin{cases} \psi'(s) - \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \psi'(t)\, dt = 0 \\ \varphi(s) - \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial t} \varphi(t)\, dt = 0 \end{cases}$$

skąd wynika, że przez kwadratury i branie pochodnych znajdujemy funkcje charakterystyczne dla wartości charakterystycznych $-\lambda$, o ile są znane funkcje charakterystyczne dla wartości charakterystycznych $+\lambda$ i naodwrót.

Zagadnienia Neumanna i Robina.

Równania (7) i (8) prowadzą na podstawie związków (1) i (2) do następujących równań całkowych ze sobą sprzężonych:

$$(35)\qquad \begin{cases} \mu(s) + \lambda \int K(st)\, \mu(t)\, dt = f(s) \\ \nu(s) + \lambda \int \nu(t)\, K(t\, s)\, dt = f(s) \end{cases}$$

przyczem:

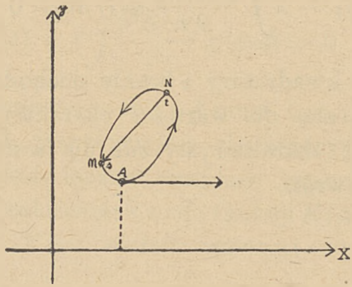
$$(36)\qquad K(st) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$$

a nadto spełniony jest warunek:

$$(37)\qquad \int K(s\, t)\, dt = 1.$$

Równania (35) są zupełnie równoważne z równaniami (7 i 8). Każde bowiem rozwiązanie równań (35) określa takie gęstości $\mu(s)$ i $\nu(s)$ warstwy pojedynczej lub podwójnej, iż potencjał od nich pochodzący czyni zadość równaniom (7 i 8). Naodwrót każde rozwiązanie równań (7 i 8) zapomocą potencjału warstwy pojedynczej względnie podwójnej określa takie gęstości $\mu(s)$ i $\nu(s)$, że spełnione są związki (1) względnie (2), a tem samem znalezione jest rozwiązanie równań (35).

Funkcja arctg $\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$ nie jest jednocześnie określona. Dla określenia jednej gałęzi tej funkcji, obieramy tak, jak na ry-



sunku kierunek rachowania dodatnich łuków, a na zmienne s i t przyjmujemy wartości zawarte w obszarze $(o \leq {s \atop t} \leq l)$. Niech m będzie dokładną dolną granicą wartości $y(s)$ $(o \leq s \leq l)$, odpowiadających krzywej (C). Istnieje w takim razie przynajmniej jeden taki punkt A, położony na krzywej (C), którego rzędna jest m i w którym styczna jest równoległa do osi x. Punkt ten obieramy za początek łuków s i t. Jeżeli punktowi N odpowiada wartość parametru t, a punktowi M wartość parametru $s > t$, to odcinkowi, łączącemu punkty N i M nadajemy kierunek od N do M.

Kąt zawarty między osią x. a wektorem $\overline{NM}$, jest to kąt dodatni, mniejszy od 2π, o który trzeba obrócić oś x w kierunku dodatnim, aby nakryła zgodnie wektor $\overline{NM}$. Przy tych umowach, budujemy nową funkcję $f(st)$ w obszarze $(o \leq {s \atop t} \leq l)$ w następujący sposób:

1°) Przyjmujemy $f(o, o) = o$.

2°) Funkcja $f(ss)$ równa się kątowi dodatniemu, mniejszemu od 2π, o który trzeba obrócić oś x w dodatnim kierunku, aby nakryła zgodnie styczną do krzywej (C) w punkcie s, przyczem ta styczna ma kierunek rosnących łuków.

Dla $s \neq t$, niech $f(st) = f(ts)$. Wobec tego założenia wystarczy funkcję $f(st)$ zdefiniować dla $s > t$. Otóż w tym wypadku przyjmujemy jako wartość funkcji $f(st)$ kąt, zawarty między osią x, a wektorem $\overline{NM}$. Mając zdefiniowaną funkcją $f(st)$ w obszarze

$\left(o \leqq \frac{s}{t} \leqq l\right)$ rozszerzamy obszar zmienności na całą płaszczyznę s, t, przyjmując:

$$f(s' t') = f(st) + (k + k')\pi$$

przyczem:

$$s' = s + kl$$
$$t' = t + k'l$$

gdzie k i k' są to jakiekolwiek liczby całkowite.

Funkcja $f(st)$ posiada następujące własności:

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = \frac{\partial}{\partial s} f(st)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = \frac{\partial}{\partial t} f(st).$$

Połóżmy:

$$N_1(st) = f(st) - \frac{(s+t)\pi}{l}$$

$$N_2(st) = \frac{(s+t)\pi}{l}$$

Funkcja $N_1(st)$ jest perjodyczna względem zmiennych s i t, a mianowicie mamy:

$$N_1(s + kl, t + k'l) = N_1(st) = N_1(ts)$$

Nadto:

$$K(st) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial N_1(st)}{\partial s} + \frac{1}{l}$$

(38) $$\int \frac{\partial N_1(st)}{\partial t}\, dt = 0.$$

W a r t o ś c i c h a r a k t e r y s t y c z n e j ą d r a $\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$.

XXII. T w i e r d z e n i e.[1]) Jądro $K(st)$ posiada -1 jako wartość charakterystyczną stopnia pierwszego i rzędu pierwszego.

---

[1]) P. str. 54 § 25.

Dowód. Ze związku (37) wynika natychmiast, że równanie całkowe:

$$(39)\qquad \psi(s)-\int\psi(t)\,K(ts)\,dt=0$$

posiada jako funkcję charakterystyczną, należącą do wartości charakterystycznej — 1, liczbę stałą, różną od zera. Wobec tego równania jednorodne, z równaniem (39) sprzężone:

$$(40)\qquad \varphi(s)-\int K(st)\,\varphi(t)\,dt=0$$

posiada też rozwiązanie $\varphi(s)=m(s)$, które nie znika identycznie; — 1 jest zatem wartością charakterystyczną. Ponieważ stała jest rozwiązaniem równania (39) a funkcja $m(s)$ jest rozwiązaniem równania (40), więc aby wykazać, że — 1 jest wartością charakterystyczną rzędu pierwszego, wystarczy na podstawie twierdzenia XI udowodnić, że całka $\int m(s)\,ds$ jest różna od zera. Przypuśćmy, że $\int m(s)\,ds=0$. Potencjał:

$$(41)\qquad v(p)=\int\frac{1}{\log r_{pt}}\,m(t)\,dt$$

czyni zadość na podstawie (1) i (2) następującym związkom:

$$\frac{dv}{dn_-}-\frac{dv}{dn_+}=2\pi\,m(s)$$

$$\frac{dv}{d\bar{n}_+}+\frac{dv}{d\bar{n}_-}=2\pi\int K(st)\,m(t)\,dt=2\pi\,m(s)$$

skąd po uwzględnieniu twierdzenia Greena wynika, że potencjał $v(p)$ jest wewnątrz krzywej (C) stały. Ponieważ potencjał jest wewnątrz krzywej (C) stały, a nadto jest funcją ciągłą i regularną w nieskończoności, ($\int m(s)\,ds=0$), musi zatem znikać identycznie, co pociąga za sobą, że $m(s)\equiv 0$ wbrew temu, co udowodniliśmy o funkcji $m(s)$. Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że — 1 jest wartością charakterystyczną stopnia pierwszego. Z uwagi na to, że $\int m(s)\,ds$ jest różna od zera, można wyznaczyć stałą c tak, żeby:

$$\int[c\,m(s)+m_1(s)]\,ds=0$$

przyczem przypuściliśmy, że $\varphi(s)=m_1(s)$ czyni też zadość równaniu (40). Potencjał:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}} [cm(t) + m_1(t)]\, dt$$

posiada te same własności, co i potencjał (41), a zatem $c.m(s) + m_1(s) = 0$, czyli funkcja $m(s)$, czyniąca zadość równaniu (40) jest określona w zupełności aż do współczynnika stałego.

Przyjmujemy w dalszym ciągu jako funkcję charakterystyczną równania (39) liczbę stałą $+1$, wobec czego funkcja charakterystyczna równania (40) ma tę własność, że

$$\int m(s)\, ds = 1.$$

XXIII. Twierdzenie.[1]) Liczba $+1$ nie może być wartością charakterystyczną jądra $K(st)$.

Dowód. Przypuśćmy, że równanie całkowe:

$$\varphi(s) + \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

posiada rozwiązanie $\varphi(s) = n(s)$, nie znikające identycznie. W takim razie potencjał:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}}\, n(t)\, dt$$

czyni zadość związkom:

$$\frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} = 2\pi\, n(s)$$

$$\frac{dv}{du_+} + \frac{dv}{du_-} = 2\pi \int K(st)\, n(t)\, dt = -2\pi\, n(s)$$

stąd wynika, że:

(42) $$\frac{dv}{dn_-} \equiv 0$$

(43) $$\int n(s)\, ds = 0$$

Na podstawie wzoru Greena wnosimy z (42) i z (43), że potencjał $v(p)$ znika identycznie zewnątrz krzywej (C), a ponieważ jest funkcją ciągłą znika także i na krzywej (C), a tem samem wewnątrz krzywej (C), co pociąga za sobą, że $n(s) \equiv 0$ wbrew założeniu.

---

[1]) P. str. 54 § 25. Ograniczenie (C) składa się z jednej krzywej zamkniętej.

XXIV. Twierdzenie. Wartości charakterystyczne, należące do jądra $K(st)$ są rzeczywiste, rzędu pierwszego.

Dowód. Na podstawie wzorów (39) i (40) i twierdzenia XXII możemy położyć:

$$K(st) \equiv \frac{1}{l} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial N_1(st)}{\partial s} \equiv m(s) + A(st) \tag{44}$$

przyczem $A(st)$ jest funkcją ciągłą zmiennych s i t w obszarze $\left(0 \leqq {s \atop t} \leqq l\right)$, gdy $s \neq t$ i wszędzie ograniczoną. Uwzględniając związki:

$$m(s) - \int K(st)\, m(t)\, dt = 0 \tag{45}$$

$$1 - \int K(ts)\, dt = 0$$

$$\int m(t)\, dt = 1$$

znajdziemy:

$$\int A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

$$\int A(ts)\, dt = 0 \tag{46}$$

Połóżmy:

$$m(s) = \frac{1}{l} - \frac{dm_1(s)}{ds} \tag{47}$$

gdzie $\frac{dm_1(s)}{ds}$ jest funkcją ciągłą, czyniącą zadość warunkowi:

$$\int \frac{dm_1(s)}{ds}\, ds = 0$$

Z tożsamości (44) i (47) wynika:

$$A(st) \equiv \frac{\partial}{\partial s} \left[m_1(s) + \frac{1}{\pi} N_1\,(s\,t) \right]$$

a więc $A(st)$ jest pochodną cząstkową rzędu pierwszego. Na podstawie twierdzenia (V):

$$\int \log r_{ut}\, K(ut) = H(st)$$

gdzie $H(st)$ jest funkcją symetryczną zmiennych s i t. Podstawiając za $K(ut)$ wyrażenie (44), znajdziemy:

$$\int \log r_{su} [m(u) + A(ut)] du = H(st)$$

Lecz:

$$\int \log r_{su} m(u) du = \alpha = \text{Constans}$$

a zatem:

$$(48) \qquad \int \log r_{su} A(ut) du = H(st) - \alpha$$

czyli $A(ut)$ da się usymetrycznić przy pomocy funkcji $\log r_{su}$. — Niech będzie $\varphi_1(s) = p(s) +$ i $q(s)$ funkcja charakterystyczna zespolona, należąca do wartości charakterystycznej λ_1 też zespolonej. Istnieje w takim razie funkcja charakterystyczna $\overline{\varphi}_1(s) = p(s) -$ i $- q(s)$, która należy do wartości charakterystycznej $\bar{\lambda}_1$, sprzężonej z λ_1. Mamy:

$$(49) \qquad \varphi_1(s) + \lambda_1 \int A(st) \varphi_1(t) dt = 0.$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia XVIII:

$$(50) \qquad \psi_1(s) = \int \log r_{su} \varphi_1(u) du$$

jest funkcją charakterystyczną równania:

$$(51) \qquad \psi_1(s) + \lambda_1 \int \psi_1(u) A(us) du = 0$$

i nadto $\lambda_1 \mp \bar{\lambda}_1$, więc funkcja $\varphi_1(s)$ musi być ortogonalna do funkcji $\psi_1(s)$, to jest musi zachodzić równość:

$$\int \int \log r_{st} \varphi_1(s) \varphi_1(t) ds\, dt = 0$$

albo:

$$(52) \qquad \int \int \log r_{st} p(s) p(t) ds\, dt + \int \int \log r_{st} q(s) q(t) ds\, dt = 0$$

Z drugiej strony na podstawie (46) i (49):

$$\int \varphi_1(s) ds = 0$$

a tem samem:

$$\int p(s)\,ds = \int q(s)\,ds = 0. \tag{53}$$

Obie całki, figurujące po lewej stronie równości (52) mają na podstawie wzoru (5) ten sam znak, więc:

$$\int\int \log r_{st}\, p(s)\, p(t)\, ds\, dt = \int\int \log r_{st}\, q(s)\, q(t)\, ds\, dt = 0$$

Z uwagi na związki (53), znajdujemy na podstawie twierdzenia III:

$$p(s) \equiv q(s) \equiv 0$$

Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że wartości charakterystyczne są rzędu pierwszego. Przypuszczamy w tym celu, aby nie wprowadzać nowych oznaczeń, że w związkach (49) i (51) λ_1 jest liczbą rzeczywistą i funkcje $\varphi_1(s)$ i $\psi_1(s)$ są funkcjami rzeczywistemi zmiennej s. Na podstawie twierdzenia XI λ_1 jest wartością charakterystyczną rzędu pierwszego, jeżeli całka $\int \varphi_1(s)\, \psi_1(s)\, ds$ jest od zera odmienna. Przyjmujemy, że:

$$\int \varphi_1(s)\, \psi_1(s)\, ds = 0$$

albo na podstawie (50):

$$\int\int \log r_{st}\, \varphi_1(s)\, \varphi_1(t)\, ds\, dt = 0$$

przyczem:

$$\int \varphi_1(s)\, ds = 0$$

Podobnie, jak wyżej, wynika stąd:

$$\varphi_1(s) \equiv 0$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że jądro $A(st)$ posiada wartości charakterystyczne rzeczywiste i rzędu pierwszego. Ze związków:

$$K(st) = m(s) + A(st)$$

$$\int m(t)\, dt = 1.$$

$$\int A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

i z twierdzenia XIII wynika, że zbiór wartości charakterystycznych jądra $K(st)$ równa się zbiorowi wartości charakterystycznych jądra $A(st)$ i liczbie -1, o której wiemy na podstawie twierdzenia XXII, że jest wartością charakterystyczną rzędu pierwszego. Twierdzenie XXIV jest zatem w zupełności udowodnione.

XXV. Twierdzenie.[1]) Wartości charakterystyczne, należące do jądra $K(st)$ są co do bezwzględnej wartości większe albo też równe $+1$.

Dowód. Niech będzie

$$\varphi_k(s) + \lambda_k \int K(st)\, \varphi_k(t)\, dt = 0$$

przyczem $\varphi_k(s)$ oznacza funkcję charakterystyczną, należącą do wartości charakterystycznej $+\lambda_k$.

Potencjał:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}}\, \varphi_k(t)\, dt$$

czyni zadość na podstawie wzorów (1) i (7) związkowi:

$$\lambda_k \left[\frac{dv}{dn_+} + \frac{dv}{dn_-}\right] = \frac{dv}{dn_+} - \frac{dv}{dn_-} \tag{54}$$

Połóżmy:

$$I^+ = -\int v \frac{dv}{du_+}\, ds; \quad I^- = \int v \frac{dv}{du_-}\, ds$$

Jeżeli pomnożymy obie strony związku (54) przez $v(s)$ i zcałkujemy, znajdziemy:

$$\lambda_k [I^+ - I^-] = I^+ + I^-$$

Z uwagi na to, że całki I^+ i I^- są dodatnie, z ostatniej równości wynika:

$$|\lambda_k| \geqq 1.$$

XXVI. Twierdzenie.[2]) Zbiór wartości charakterystycznych, należących do jądra $K(st)$, składa się z liczby -1, i z liczb

[1]) H. B. Heywood M. Fréchet. L'équation de Fredholm. Paris 1912. p. 112.

[2]) P. str. 85 § 34.

co do bezwzględnej wartości większych od $+1$ i położonych symetrycznie ze względu na punkt zerowy płaszczyzny λ.

Dowód. Tożsamość (38) orzeka, że jądro $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ jest ortogonalne do jądra $\frac{1}{l}$, a zatem na podstawie twierdzenia XIII-go i związku (44), zbiór wartości charakterystycznych, należących do jądra $K(st)$, równa się sumie zbiorów wartości charakterystycznych, należących do jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ i do jądra $\frac{1}{l}$. Lecz $\frac{1}{l}$ posiada jedną wartość charakterystyczną -1, jądro zaś $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ na podstawie twierdzenia XXI posiada wartości charakterystyczne położone symetrycznie ze względu na punkt zerowy płaszczyzny λ. Nadto -1 nie może być wartością charakterystyczną jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$, gdyż wówczas i $+1$ musiałoby być wartością charakterystyczną jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$, a tem samem jądra $K(st)$, co sprzeciwia się twierdzeniu XXIII. — Wszystkie wartości charakterystyczne jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ są zatem co do bezwzględnej wartości większe od $+1$.

XXVII. Twierdzenie. Jądro $K(st)$ posiada oprócz -1, przynajmniej dwie wartości charakterystyczne, o ile $A(st)$ nie równa się identycznie zeru.

Dowód. Ze związku (46) i (48) wynika na podstawie twierdzenia XX, że jądro $A(st)$ posiada przynajmniej jedną wartość charakterystyczną. Ponieważ jądro $K(st) = m(s) + A(st)$ posiada -1 jako wartość charakterystyczną rzędu i stopnia pierwszego (twierdzenia XXII) i zachodzi związek

$$\int A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

przeto na podstawie twierdzenia XIII. zbiór wartości charakterystycznych jądra $K(st)$ równa się liczbie -1 i zbiorowi wartości charakterystycznych jądra $A(st)$. Stąd i z twierdzenia poprzedniego wynika, że zbiory wartości charakterystycznych jądra $A(st)$ i jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ są identyczne, a zatem istnieć muszą oprócz -1 przy-

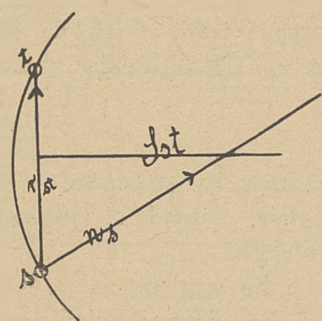
najmniej dwie wartości charakterystyczne jądra $K(st)$, o ile oczywiście funkcja $A(st)$ nie znika identycznie. Naodwrót, jeśli jądro $K(st)$ posiada jedną jedyną wartość charakterystyczną -1, to $A(st)$ nie posiada żadnej wartości charakterystycznej, a tem samem na podstawie wniosku I musi znikać identycznie.

XXVIII. Twierdzenie. Jądro $K(st)$ posiada nieskończenie wiele wartości charakterystycznych w przypadku, w którym krzywa (C) czyni zadość warunkom, które dotychczas przyjęliśmy i jeżeli nadto jej promień krzywizny, uważany jako funkcja łuku, posiada przynajmniej jeden punkt nieciągłości. Jeśli nieciągłość ma miejsce dla $s = s_0$, to przypuszczamy, że istnieją określone granice promienia krzywizny, gdy s zmierza do s_0 w ten sposób, że $s > s_0$ względnie $s < s_0$.

Dowód. Jądro $K(st)$ można przedstawić w formie:

$$K(st) = \frac{1}{\pi r_{st}} \cos(\widehat{n_s\, r_{st}}) \tag{55}$$

przyczem $\widehat{n_s\, r_{st}}$ oznacza dodatni kąt, zawarty między normalną w punkcie s skierowaną do wnętrza, a promieniem r_{st}, mającym kierunek od s do t, jak to uwidocznione na rysunku. Poprowadźmy normalną w środku odcinku r_{st} aż do punktu przecięcia się jej z normalną n_s. Oznaczmy ją przez ϱ_{st}.



W takim razie:

$$r_{st} = 2\varrho_{st} \operatorname{cotg}(\widehat{u_s\, r_{st}})$$

Na podstawie (55) mamy zatem:

$$K(st) = \frac{1}{2\pi\varrho_{st}} . \sin(\widehat{n_s\, r_{st}}) \tag{56}$$

Ze związku (56) wynika, że granica, do której zmierza $K(st)$ gdy t zmierza do s, równa się $\frac{1}{2\pi R}$, jeśli przez R oznaczymy promień krzywizny krzywej (C) w punkcie s. W punktach nieciągłości promienia krzywizny istnieją dwie granice (prawa i lewa) zależnie od tego, czy $s > t$, czy też $s < t$. Przypuśćmy przy tych założeniach, że jądro $K(st)$ posiada skończoną liczbę wartości charakterystycznych $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ i odpowiadające im funkcje charakterystyczne: $\varphi_1(s)\, \psi_1(t) \ldots \varphi_n(s)\, \psi_n(t)$, przyczem niektóre z pomiędzy

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ mogą być sobie równe, a funkcje φ i funkcje ψ są między sobą liniowo niezależne.

Udowodnimy, że jądro $K(st)$ da się przedstawić w formie:

$$K(st) = \frac{\varphi_1(s)\,\psi_1(t)}{-\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t)}{-\lambda_n} \tag{57}$$

Rzeczywiście najogólniejsze jądro, które posiada powyższe wartości i funkcje charakterystyczne, musi być kształtu:

$$K(st) = K_1(st) + G(st) \tag{58}$$

gdzie:

$$K_1(st) = \frac{\varphi_1(s)\,\psi_1(t)}{-\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t)}{-\lambda_n} \tag{59}$$

$$\int K(ts)\,dt = 1 \tag{60}$$

Ponieważ jądro $K(st)$ da się usymetrycznić przy pomocy funkcji $\log r_{st}$ i podobnie jądro $K_1(st)$ ze względu na związek:

$$\psi_n(s) = \int \log r_{st}\, \varphi_n(t)\,dt$$

przeto i jądro $G(st)$ da się usymetrycznić przy pomocy funkcji $\log r_{st}$. Uwzględniając związki (37) i (60) mamy:

$$\int G(ts)\,dt = 0$$

a zatem na podstawie wniosku I, jądro $G(st)$ musi znikać identycznie, a stąd na podstawie wzorów (58) i (59), otrzymujemy wzór (57).

Ze względu na to, że funkcje φ i funkcje ψ są liniowo niezależne, istnieje taki układ wartości na zmienną t np. $t_1 \dots t_n$, że wyznacznik układu równań, otrzymanych ze związku (57):

$$K(st_k) = \frac{\varphi_1(s)\,\psi_1(t_k)}{-\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t_k)}{-\lambda_n} \quad (k = 1, \dots n) \tag{61}$$

jest od zera odmienny. Inaczej funkcje $\psi_1 \dots \psi_n$ byłyby liniowo zależne. Rozwiązując układ równań (61) względem $\varphi_1(s) \dots \varphi_n(s)$ wyrażamy te funkcje liniowo zapomocą $K(st_k)$. Analogicznie można postąpić z funkcjami $\psi_1 \dots \psi_n$ i wyrazić je liniowo zapomocą $K(s_k t)$ $(k = 1, 2 \dots n)$.

Ponieważ nadto funkcje φ i ψ czynią zadość równaniom całkowym jednorodnym:

$$\begin{aligned} &\varphi_k(s) + \lambda_k \int K(st)\, \varphi_k(t)\, dt = 0 \\ &\psi_k(s) + \lambda_k \int \psi_k(t)\, K(ts)\, dt = 0 \end{aligned} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

więc funkcje $\varphi_k(s)$ i $\psi_k(s)$ muszą być ciągłe w przedziale $(o \leqq s \leqq l)$.

Niech będzie s_0 punktem nieciągłości promienia krzywizny krzywej (C). Wyrażenie:

$$K(s_0 t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} \Bigg|_{s=s_0} = \frac{1}{2\pi \varrho_{s_0 t}}$$

nie zmierza wówczas do określonej granicy, gdy t zmierza do s_0; jeśli jednak uwzględnimy wzór (57) i ten fakt, że funkcje φ i ψ są ciągłe, wyrażenie to musi zmierzać do określonej granicy. Sprzeczność tę możemy usunąć jedynie, przyjmując, że jądro $K(st)$ posiada nieskończenie wiele wartości charakterystycznych.

XXIX. Twierdzenie. Jedyną krzywą, która posiada tylko — 1 jako wartość charakterystyczną, jest koło.

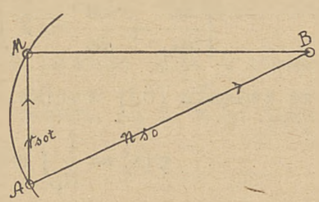
Dowód. Na podstawie wzoru (44) i twierdzenia XXVII mamy

$$K(st) = m(s)$$

albo na podstawie (56):

$$\frac{1}{\pi r_{st}} \cos (\widehat{n_s r_{st}}) = m(s) \tag{62}$$

Obierzmy na s wartość stałą s_0. Niech punkt A odpowiada wartości s_0 a punkt M wartości t, jak zaznaczono na rysunku. Nakreślmy w punkcie M prostopadłą do odcinka $r_{s_0 t}$ aż do punktu przecięcia się B z normalną ns_0 do krzywej (C) w punkcie A. W takim razie:



$$r_{s_0 t} = AB. \cos (\widehat{n_{s_0} r_{s_0 t}})$$

Stąd i na podstawie (62):

$$\frac{1}{\pi .\, AB} = m(s_0)$$

Niech punkt M opisze łuk krzywej (C); wówczas z ostatniego

związku wynika, że normalna do $r_{s_0 t}$ w punkcie M zawsze przechodzi przez punkt B, a zatem krzywa (C) musi być kołem.

Jądro $\log r_{st}$.

XXX. Twierdzenie. Jądro $\log r_{st} + m(s)\, m(t)$ gdzie $m(s)$ jest funkcją ciągłą, określoną wzorem (45) jest zamknięte.

Dla dowodu przypuśćmy, że istnieje taka ciągła funkcja $\varphi(s)$, że:

$$\int \log r_{st}\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{63}$$

Jeśli utworzymy potencjał warstwy pojedynczej:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}}\, \varphi(t)\, dt \tag{64}$$

to w takim razie potencjał ten przyjmuje na krzywej (C) wartość zero, a tem samem jest wewnątrz krzywej (C) stały, równy zeru. Wnosimy stąd, że:

$$\frac{dv}{dn_+} = 0 \tag{65}$$

Ze związków:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{dv}{du_-} - \frac{dv}{du_+} = 2\pi\varphi(s) \\ &\frac{dv}{du_+} + \frac{dv}{du_-} = 2\int \varphi(t) \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}\, dt \end{aligned}\right.$$

i ze związku (63) wynika, że:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int \varphi(t) \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}\, dt$$

albo na podstawie (36):

$$\varphi(s) - \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{66}$$

Funkcja zatem $\varphi(s)$, która czyni zadość związkowi (63) musi czynić zadość związkowi (66), czyli być funkcją charakterystyczną jądra $K(st)$ dla wartości charakterystycznej -1. Jedyna taka funkcja, jak widzieliśmy na podstawie twierdzenia XXII. jest $\varphi(s) =$

$= m(s)$. Naodwrót, jeżeli spełniony jest związek (66), to potencjał, określony wzorem (64) czyni zadość związkom:

$$\frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} = 2\pi\varphi(s)$$

$$\frac{dv}{dn_+} + \frac{dv}{dn_-} = 2\pi\varphi(s)$$

skąd:

$$\frac{dv}{dn_+} = 0.$$

a zatem na podstawie wzoru Greena, $v =$ Constans.

Ponieważ potencjał $v(p)$ jest wewnątrz krzywej (C) stały i jest funkcją ciągłą, więc i na krzywej (C) jest też stały. Mamy zatem:

$$\int \log r_{st}\, \varphi(t)\, dt = \alpha = \text{Constans}.$$

O ile stała α nie równa się zeru, nie istnieje taka funkcja $\varphi(s)$, aby spełniony był warunek (63), czyli jądro $\log r_{st}$ jest zamknięte, jeżeli zaś stała $\alpha = 0$, to taka funkcja istnieje i równa się $\varphi(s) = m(s)$, a zatem w tym drugim wypadku $\log r_{st} + m(s)\, m(t)$ jest jądrem zamkniętem.

Udowodnimy, że w przypadku, gdy ograniczenie jest kołem zachodzić mogą oba wypadki, zależnie od wielkości promienia koła. Ponieważ w tym wypadku $m(s) =$ Constans, więc wystarczy obliczyć całkę $I = \int \log r_{st}\, ds$ wziętą wzdłuż obwodu koła o promieniu R. Wartość tej całki jest jednak niezależna od t, więc przyjmujemy $t = 0$. Dla $0 \leqq s \leqq R\pi$ mamy:

$$r_{s0} = 2R \sin\frac{s}{2R}$$

a dla $R\pi \leqq s \leqq 2R\pi$ mamy:

$$r_{s0} = 2R\cos\left(\frac{s}{2R} - \frac{\pi}{2}\right) = 2R\sin\frac{s}{2R}$$

Całkę I można zatem przedstawić w formie:

$$I = \int_0^{R\pi} \log\left(2\,R\ \sin\ \frac{s}{2R}\right) ds + \int_{R\pi}^{2R\pi} \log\left(2\,R\ \sin\ \frac{s}{2R}\right) ds$$

$$= \int_0^{2R\pi} \log\left(2\,R\ \sin\ \frac{s}{2R}\right) ds\ .$$

Połóżmy $\frac{s}{2R} = \sigma$, to znajdziemy:

$$I = 2R \int_0^{\pi} \log\,(2R\ \sin\ \sigma)\ d\sigma$$

$$= 2R\pi\ \log\ 2R + 2R \int_0^{\pi} \log\,(\sin\ \sigma)\ d\sigma$$

$$= 2R\pi\ \log\ 2R + 2R \int_0^{\pi} \log\,(\sin\ \sigma)\ d\sigma$$

$$= 2R\pi\ \log\ 2R + 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\sigma)d\sigma + 2R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin\sigma)d\sigma$$

Połóżmy w drugiej całce $\sigma = \pi - \tau$; w takim razie:

$$I = 2R\pi \log 2R + 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(\sin\ \sigma)\ d\sigma + 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(\sin\ \tau)\ d\tau.$$

Lecz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\tau)\,d\tau = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$ [1]

Zatem:

$$I = 2R\pi\ (\log 2R - \log 2)$$

Widoczną jest stąd rzeczą, że całka I obraca się w zero dla $R = 1$; dla $R < 1$ całka I jest ujemna, a dla $R > 1$ całka I jest

---

[1]) F. Frenet. Recueil d'exercices. Str. 259. Zadanie 439. Paris 1904. — Gauthier-Villars.

dodatnia. Jądro log r_{st} w przypadku, gdy ograniczenie jest kołem, jest zawsze zamknięte, z wyjątkiem wypadku, gdy $R=1$. Wówczas wystarczy do log r_{st} dodać dowolną stałą, różną od zera, aby otrzymać jądro zamknięte.

XXXI. Twierdzenie. W przypadku, gdy ograniczenie jest elipsą, jądro log r_{st} posiada jako funkcje charakterystyczne: stałą, sin (ns), cos (ns) $(n=1, 2\ldots)$ przyczem s i t zmieniają się w obszarze $(o \leqq {s \atop t} \leqq 2\pi)$.

Dowód. Funkcja rozwiązująca, odpowiadająca problematom teorji potencjału w przypadku, gdy ograniczenie jest elipsą, da się przedstawić w formie: [1])

$$(67) \qquad K(\lambda; st) = \frac{1}{2\pi(1+\lambda)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(ns)\cos(nt)}{\lambda+k_n} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ns)\sin(nt)}{\lambda-k^n}$$

przyczem $k=\frac{a+b}{a-b}$, oznaczając przez a i b dłuższą i krótszą półoś elipsy.

Z wzoru tego wynika, że wartości charakterystyczne jądra $K(st)$, odpowiadającego elipsie, to jest jądra: [2])

$$(68) \qquad K(st) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} g^n \cos n(s+t)$$

gdzie $g=\frac{1}{k}$, są:

$$-1,\ k,\ k^2\ldots,\quad -k,\ -k^2\ldots$$

a odpowiadające im funkcje charakterystyczne:

(69) stała, sin s, sin $2(s)\ldots$, cos s, cos $(2s),\ldots$

Zbiór tych funkcji tworzy system zupełny. Jądro (68) da się usymetrycznić przy pomocy funkcji log r_{st}, a z tego faktu na podstawie twierdzenia XVIII wynika:

---

[1]) P. str. 72 wzór (π).

[2]) P. str. 72 wzór (ν).

$$\int_0^{2\pi} \log r_{st} \sin(nt)\, dt = a_n \sin(ns)$$

$$\int_0^{2\pi} \log r_{st} \cos(nt)\, dt = b_n \cos(nt)$$

$$\int_0^{2\pi} \log r_{st}\, dt = \text{Constans}$$

przyczem stałe a_n i b_n są odmienne od zera, a występują one dzięki tej okoliczności, że funkcje charakterystyczne są określone w zupełności aż do współczynnika stałego. Związki powyższe wyrażają, że zbiór funkcji (69) jest identyczny ze zbiorem funkcji charakterystycznych jądra $\log r_{st}$.

Przypadki, w których $K(st)$ jest symetryczne.

XXXII. Twierdzenie. Jądro $K(st)$ jest symetryczne wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczenie (C) jest kołem lub elipsą.

Dowód. Wiadomą jest rzeczą, że jądro $K(st)$, odpowiadające problematom teorji potencjału w przypadku, gdy ograniczenie jest kołem, ma postać:

$$K(st) = \frac{1}{2\pi}$$

w przypadku zaś, gdy ograniczenie jest elipsą, określone jest wzorem (68). Stąd wynika, że jądro $K(st)$ jest symetryczne, gdy ograniczenie jest kołem lub elipsą. Odwrotność tego twierdzenia jest też słuszną.

Aby jądro $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$ było funkcją symetryczną, musi zachodzić, jak łatwo sprawdzić, następująca identyczność:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)} = F(s+t)$$

a stąd:

$$\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)} = F_1(s+t) \tag{70}$$

Przypuszczamy w dalszym ciągu, nie zmieniając jednakże oznaczeń, że zmienna s określona jest w przedziale $(0 \leqq s \leqq 2\pi)$, co zawsze można osiągnąć przez proste przekształcenie.

Kładąc w związku (70) odpowiednio w miejsce liter s i t, litery $s+h$, $s-h$, znajdziemy:

$$\frac{y(s+h)-y(s-h)}{x(s+h)-x(s-h)}=F_1(2s).^{1)}$$

---

¹) Dowód ten zawdzięczam uprzejmości Pana Profesora S. Zaremby. — Pierwotnie podałem dowód, w którym musiałem założyć ciągłość pochodnych funkcji $x(s)$ i $y(s)$ aż do piątego rzędu. Dowód ten jest następujący:

Obliczmy w związku ostatnim pierwszą i drugą pochodną względem h:

$$[y'(s+h)+y'(s-h)].[x(s+h)-x(s-h)]=[x'(s+h)+(x'(s-h)].$$
$$.[y(s+h)-y(s-h)]$$

$$(\alpha)\quad [y''(s+h)-y'(s-h)].[x(s+h)-x(s-h)]=[x''(s+h)-x''(s-h)].$$
$$.[y(s+h)-y(s-h]$$

Ponieważ wyznacznik tych równań znika, więc:

$$\frac{x''(s+h)-x''(s-h)}{2h}[y'(s+h)+y'(s-h)]=[x'(s+h)+x'(s-h)].$$
$$.\frac{y''(s+h)-y''(s-h)}{2h}$$

Niech h zmierza do zera, wówczas w granicy:

$$(\beta)\quad x'''y'-y'''x'=0 \quad \text{albo} \quad (\gamma)\quad x''y'-y''x'=a_1$$

gdzie a_1 jest stałą całkowania.

Ze związku (70) i (α) wynika, że także:

$$\frac{y''(s)-y''(t)}{x''(s)-x''(t)}=F_1(s+t)$$

Widzimy stąd, że funkcje;

$$(\delta)\qquad \begin{cases}\eta(s)=y''(s)\\ \xi(s)=x''(s)\end{cases}$$

czynią zadość tym samym związkom, którym czynią zadość funkcje $x(s)$ i $y(s)$. Możemy zatem na podstawie (β) i (γ) położyć:

$$(\varepsilon)\quad \xi'''\eta'-\eta'''\xi'=0$$

$$(\zeta)\quad \xi''\eta'-\eta''\xi'=b_1$$

gdzie b_1 jest stałą całkowania. Uwzględniając wzory (δ) można związek (ε) przedstawić w formie:

$$(\vartheta)\qquad x^{V}y'''-y^{V}x'''=0.$$

Rozróżniamy w dalszym ciągu dwa przypadki:

Obliczmy w ostatnim związku pochodną względem k i powróćmy do dawnych oznaczeń, otrzymamy:

(71) $\{y'(s)+y'(t)\}.\{x(s)-x(t)\}-\{x'(s)+x'(t)\}.\{y(s)-y(t)\}=0.$

Połóżmy:

$$(72)\quad \begin{cases} A_m=\int\limits_0^{2\pi} x(s)\cos(ms)\,ds & B_m=\int\limits_0^{2\pi} x(s)\sin(ms)\,ds \\ P_m=\int\limits_0^{2\pi} y(s)\cos(ms)\,ds & Q_m=\int\limits_0^{2\pi} y(s)\sin(ms)\,ds \end{cases}\qquad (m=1,2\ldots)$$

---

a) Funkcje $x'''(s)$ i $y''(s)$ znikają identycznie. Wówczas:

$$x(s)=ms^2+ns+p$$
$$y(s)=m_1s^2+n_1s+p_1$$

gdzie $m\ n\ p\ m_1\ n_1\ p_1$ oznaczają stałe dowolne.

Ponieważ dopuszczalne są tylko krzywe zamknięte, położone w skończoności, więc powyższe równania mogą przedstawiać tylko koło lub elipsę.

b) Funkcje $x'''(s)$ i $y'''(s)$ nie znikają identycznie równocześnie. W tym wypadku na podstawie (β) i (ϑ) mamy:

$$(\lambda)\qquad x^{V}y'-y^{V}x'=0$$

Zróżniczkujmy związek (β). Otrzymamy:

$$x^{IV}y'+x'''y'''-x'y^{IV}=0$$
$$2(x^{IV}y''-x''y^{IV})+y'x^{V}-x'y^{V}=0$$

Z ostatniego związku na podstawie (λ) wynika:

$$(\mu)\qquad x^{IV}y''-x''y^{IV}=0$$

Wprowadźmy do związku (μ) znaczenia (δ); znajdziemy:

$$(\nu)\qquad \xi''\eta-\xi\eta''=0$$

Skąd:

$$(\sigma)\qquad \xi'\eta-\xi\eta'=c_1$$

gdzie c_1 jest stałą całkowania. Ze związków (ζ), (ν) i (σ) wynika:

$$b_1\xi+c_1\xi''=0$$
$$b_1y+c_1y''=0$$

Jeśli uwzględnimy ten warunek, że szukana krzywa ma być zamknięta i położona w skończoności, to całkując ostatnie równania, dochodzimy do wniosku, że krzywa:

$$x=x(s)$$
$$y=y(s)$$

może być tylko kołem lub elipsą.

Uwzględniając perjodyczność funkcji $x(s)$, $y(s)$ znajdujemy:

$$(73) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} x'(s) \cos(ms)\, ds = -mB_m; & \int_0^{2\pi} x'(s) \sin(ms)\, ds = mA_m \\ & (m = 1, 2 \ldots) \\ \int_0^{2\pi} y'(s) \cos(ms)\, ds = -mQ_m; & \int_0^{2\pi} y'(s) \sin(ms)\, ds = mP_m \end{cases}$$

Pomnóżmy równanie (71) kolejno jednym z iloczynów:

$$\begin{matrix} \cos(ms)\cos(pt)\, ds\, dt, & \cos(ms)\sin(pt)\, ds\, dt \\ \sin(ms)\cos(pt)\, ds\, dt, & \sin(ms)\sin(pt)\, ds\, dt \end{matrix} \qquad (m, p = 1, 2 \ldots)$$

i zcałkujmy za każdym razem w obszarze:

$$o \leqq s \leqq 2\pi$$
$$o \leqq t \leqq 2\pi$$

Otrzymamy cztery następujące związki:

$$(74) \quad \begin{cases} m Q_m A_p - p Q_p A_m - m B_m P_p + p B_p P_m = 0 \\ m Q_m B_p + p P_p A_m - m B_m Q_p - p A_p P_m = 0 \\ -m P_m A_p - p Q_p B_m + m A_m P_p + p B_p Q_m = 0 \\ -m P_m B_p + p P_p B_m + m A_m Q_p - p A_p Q_m = 0 \end{cases} \quad (m, p = 1, 2 \ldots)$$

Wszystkie powyższe związki redukują się dla $m = p$ do zwykłych identyczności; przypuszczamy więc w dalszym ciągu:

$$(75) \qquad m \neq p.$$

Równania (74) są linjowe i jednorodne względem:

$$(76) \qquad A_p \; B_p \; P_p \; Q_p$$

i pominąwszy znak, wyznacznik tych równań, uważanych jako równania względem niewiadomych (76) jest równy:

$$(m^2 - p^2)(P_m B_m - Q_m A_m)^2$$

Jeżeli zatem dla oznaczonej wartości p, nie wszystkie liczby (76) są zerami, to z równań (74) na podstawie nierówności (75) wynika:

$$(77) \qquad P_m B_m - Q_m A_m = 0.$$

Ponieważ w rozumowaniu powyższem wolno przestawić wskaźniki m i p, więc widoczną jest także słuszność twierdzenia następującego:

Jeśli nierówność (75) jest spełniona i jeśli dla uważanej wartości na m, nie wszystkie liczby:

(78) $$A_m \; B_m \; P_m \; Q_m$$

są zerami, to:

(79) $$P_p B_p - Q_p A_p = 0.$$

Z poprzedniego wynika zatem lemmat następujący:

I. Lemmat: Jeśli istnieją dwie wartości różne, całkowite, dodatnie r takie, że dla każdej z nich nie wszystkie liczby:

(80) $$A_r \; B_r \; P_r \; Q_r$$

są zerami, to mamy:

(81) $$P_r B_r - Q_r A_r = 0$$

dla wszystkich całkowitych dodatnich r.

Połóżmy:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_p & B_m \\ P_p & Q_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_p & A_m \\ Q_p & P_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} B_p & B_m \\ Q_p & Q_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A_m & A_p \\ P_m & P_p \end{vmatrix}$$

Przy tych oznaczeniach równania (74) można napisać w formie:

$$\begin{aligned} m\Delta_1 + p\Delta_2 &= 0 \\ p\Delta_1 + m\Delta_2 &= 0 \\ m\Delta_1 + p\Delta_4 &= 0 \\ p\Delta_1 + m\Delta_4 &= 0 \end{aligned}$$

Stąd i na podstawie nierówności (75) mamy:

(82) $$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$$

Z lemmatu I. i z równań (82) wynika lemmat następujący:

Lemmat II. Jeśli istnieją dwie wartości różne liczby całkowitej r takie, że dla każdej z nich nie wszystkie liczby (80) są zerami, to każdy wyznacznik 2-go stopnia, należący do macierzy nieskończonej:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & \dots \\ P_1 & Q_1 & P_2 & Q_2 & \dots \end{matrix} \right.$$

jest zerem.

Jeżeli założenia powyższego lemmatu są spełnione, można, jak to wynika z tego lemmatu, wyznaczyć dwie stałe a i b, nie równe zeru jednocześnie i takie, że przyjmując:

$$\varphi(s) = ax(s) + by(s)$$

mamy:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos(ms)\, ds = \int_0^{2\pi} \varphi(s) \sin m(s)\, ds = 0 \quad \text{dla} \quad m = 1, 2 \ldots$$

W tym wypadku znajdujemy więc:

$$\varphi(s) = \text{const.} = c$$

i punkt $x(s)$, $y(s)$ opisuje odcinek, położony na prostej:

$$ax + by = c.$$

Aby zatem punkt $x(s)$, $y(s)$ opisywał krzywą, spełniającą warunki zadania, potrzeba, aby istniała jedna wartość r i tylko jedna taka, dla której nie wszystkie liczby (80) są zerami; ta wartość na r musi być równa jedności, ponieważ perjod fundamentalny funkcji szukanej równa się 2π. Nadto, jeśli te warunki są spełnione, potrzeba i wystarcza, aby

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ P_1 & Q_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ażeby krzywa opisana punktem $x(s)$, $y(s)$ czyniła zadość warunkom zadania; krzywa ta jest zatem elipsą.

Sur le raisonnement dans les sciences déductives

par

Jean Sleszyński.

Ya-t-il quelque chose de plus remarquable que le rôle de l'intuition dans les recherches mathématiques? Non seulement les vérités, mais leurs démonstrations aussi sont très souvent découvertes par l'intuition. L'existence de lacunes dans les raisonnements mathématiques est dès lors tout à fait compréhensible. Dans sa production créatrice le mathématicien avance comme un somnambule!

C'est à M. Peano et à son école, que nous devons principalement l'explication de la partie inconsciente dans les raisonnements mathématiques.

Les mathématiciens les plus éminents de tous les temps se sont toujours efforcés de saisir les traits généraux du raisonnement. Mais Descartes, par exemple, trouvait que quoique la logique „contienne... beaucoup de préceptes très vrais et très bons. il y en a toutefois tant d'autres mêlés parmi qui sont ou nuisibles ou superflus, qu'il est presque aussi malaisé de les en séparer que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché". [1])

La logique nouvelle, après les recherches de M. Frege nous mit en état de présenter des démonstrations complètes. [2]) Mais comme

[1]) Oeuvres choisies (Garnier) p. 13.

[2]) V. Zaremba: Essai sur la théorie de la démonstration dans les sciences mathématiques. L'enseignement mathématique. Nr. 1 1916.

e font craindre les remarquables „Principia mathematica“ de M. M. Whitehead et Russell, cette logique semble devoir nous obliger à rendre nos raisonnements longs et subtils à un degré inquiétant. Il est absolument certain que dans les recherches sur les fondements des mathématiques, il est impossible de se passer de démonstrations complètes, mais d'autre part il semble que ces recherches sont plutôt d'ordre philosophique que d'ordre mathématique et que les résultats de ces recherches ont seuls une valeur essentielle pour les sciences mathématiques. En effet, le sens concret et clair des vérités mathématiques est évidemment en désaccord avec des choses aussi subtiles, abstraites et obscures que, par exemple, „the hierarchy of types“. Il faut avouer que si nous nous éloignons de l'intuition spaciale (ou du moins de l'intuition schématique) le raisonnement tend à devenir impossible.

Malgré les efforts considérables des savants comme, par exemple, Abel, pour simplifier et élucider les théories mathématiques, la complication des idées et des méthodes, loin de décroître, croît au contraire sans cesse. Pour reconnaître qu'il en est bien ainsi, il suffit de rappeler qu'il y a des mathématiciens très distingués, qui nient le principe du milieu exclu et croient constater des contradictions inextricables dans l'analyse mathématique. En résumé nous sommes en danger de nous enfoncer de plus en plus dans les ténèbres de la scolastique.

Un des moyens les plus efficaces pour prévenir cette catastrophe est le principe „pauca sed matura“. Il consisterait donc à s'abstenir de publier des choses qui n'ont pas été travaillées jusqu'à les rendre claires et faciles. Malheureusement les oeuvres des mathématiciens les plus distingués prouvent que souvent leurs auteurs ne voient pas les liens logiques très compliqués dont ils se sont servis intuitivement.

Les anteurs des „Principia mathematica“ disent qu'en Mathématique la clarté ne peut pas apparaître dès le début, mais seulement dans les chapitres ultérieurs de cette science. La notion de clarté et de simplicité est indubitablement très relative, il est néanmoins certain que l'on doit s'efforcer de rendre les théories scientifiques aussi claires et simples que possible. Il me semble cependant que l'attention des savants est très rarement dirigée de ce côté. Voici avec quelle sévérité s'exprime Galois à ce sujet: „Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout

cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondement, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention" [1]).

Il ne faudrait pas croire qu'il s'agisse de simples défauts de forme de l'exposition. En fait, de profondes recherches scientifiques seules pourraient dissiper ces obscurités. Il faudrait par exemple élucider les notions fondamentales et générales comme celle de „proposition" ou „d'implication".

Le manque de place nous interdit de présenter une critique de ce qui a été fait dans cet ordre d'idées. Nous nous bornerons simplement à présenter quelques réflexions à ce sujet.

Aristote définit la proposition, comme une énonciation (λόγος), qui est vraie ou fausse. Mais cela signifie simplement qu'il adopte la loi du milieu exclu. En réalité nous avons deux valeurs logiques: „le vrai" et „le faux" et deux propositions fondamentales: la loi du milieu exclu et la loi de contradiction, qui constituent, prises ensemble, la disjonction fondamentale. La première loi nous apprend que si une proposition n'est pas vraie, elle est fausse et si elle n'est pas fausse, elle est vraie. La seconde loi exprime que si une proposition est vraie, elle n'est pas fausse et que si elle est fausse, elle n'est pas vraie. — Nous sommes tellement accoutumés à ces lois que, par exemple, deux phrases telles que les suivantes: „cette proposition est vraie" et „cette proposition n'est pas fausse" nous semblent exprimer la même chose. Nous ne remarquons pas dans ce cas l'intervention de la loi de contradiction.

C'est à M. Frege que revient le mérite d'avoir établi la notion de l'implication. Nous disons que p implique q, quand la proposition p est fausse ou la proposition q est vraie. Nous écrivons $p \supset q$. Quand p implique q et q implique p, les propositions p et q sont dites équivalentes. Nous écrivons $p = q$. On sait que toutes les déductions sont fondées exclusivement sur un seul mode d'inférence: le traditionnel „modus ponens", c'est à dire: (1) la proposition p étant vraie et (2) ayant „p implique q", la proposition q est vraie.

Il est facile maintenant de comprendre, pourquoi Aristote et, après lui, Leibniz, ont considéré la loi de la contradiction comme

[1]) Manuscrits, p. 28.

fondamentale pour toute la science: nous verrons dans un instant, que si une seule proposition p était à la fois vraie et fausse, chaque proposition q serait vraie et, par conséquent, les recherches scientifiques seraient complétement inutiles. En effet: puisque la proposition p est fausse, l'implication „p implique q" est vraie par définition; par conséquent, p étant vraie (on n'oubliera pas que, par hypothèse, la proposition p est à la fois vraie et fausse, il en sera de même (par le „modus ponens") de q.

M. Frege a insisté avec raison sur la nécessité de distinguer une proposition p de la proposition q qui en apprécie la valeur logique et par conséquent est l'une des suivantes: „p est vrai" ou „p est faux". La première de ces propositions est exprimée, selon M. Frege, par $\vdash p$. Pour la seconde nous employerons le symbole $\dashv p$.

Introduisons maintenant le symbole $\sim$ de négation pour exprimer qu'une relation affirmée par une proposition n'a pas lieu. Par exemple si la proposition p est $a = b$, $\sim p$ sera $a \neq b$. D'après ce qui précède „$\sim \dashv p$" signifie „p n'est pas faux" et „$\sim \vdash p$" signifie „p n'est pas vrai".

Nous pouvons maintenant exprimer la loi de la contradiction par

$$\vdash p \supset \sim \dashv p, \quad \dashv p \supset \sim \vdash p,$$

et la loi du milieu exclu par

$$\sim \vdash p \supset \dashv p, \quad \sim \dashv p \supset \vdash p.$$

Il importe de faire remarquer, que les propositions $\vdash \sim p$ et $\dashv \sim p$ sont respectivement équivalentes aux propositions $\sim \vdash p$ et $\sim \dashv p$. (Voir la fin de l'article).

Actuellement nous pouvons compléter ce que nous avons dit au sujet des conséquences de l'hypothèse qu'il existe au moins une proposition p qui est à la fois vraie et fausse. Je dis que dans cette hypothèse toute proposition q est non seulement vraie, comme nous l'avons déjà constaté, mais encore fausse. Pour s'assurer qu'il en est bien ainsi, substituons dans la démonstration de la vérité de q la négation, $\sim q$, de q à la proposition q elle-même; nous trouverons ainsi que $\sim q$ est vrai, autrement dit nous aurons $\vdash \sim q$ et par conséquent, (en vertu de ce que nous avons dit il y a un instant) nous aurons $\sim \vdash q$, donc (par la loi du milieu exclu) nous aurons aussi $\dashv q$ ou bien q est faux.

Il est difficile de trouver un exemple plus propre à faire apprécier la différence entre p et $\vdash p$ ou $-\!| p$, que l'aporie connue „le menteur". Désignons par p une proposition quelconque et par q la proposition suivante: „p est faux". Alors si p est vrai, q sera faux et si p est faux, q sera vrai. S'il était permis d'identifier q avec p, nous trouverions que si p est vrai, p est faux et si p est faux, p est vrai. C'est précisément le cas du „menteur", où p désigne la proposition: „ce que je dis maintenant est faux". Dans cette phrase nous identifions l'appréciation logique d'une proposition avec cette proposition elle-même; en d'autres termes nous identifions p avec $-\!| p$. Or cette identification est inadmissible, comme le serait celle de p et $\vdash p$, bien que ces deux propositions-là soient équivalentes entre elles et bien que la phrase „ce que je dis maintenant est vrai" ne conduise pas à une contradiction.

Nous avons ainsi l'explication d'une contradiction qu'on envisage souvent au même point de vue que l'aporie toute différente de M. Russell[1]).

Remarquons encore que, à cause de l'équivalence de p et de $\vdash p$, on ne les distingue ordinairement pas dans le calcul logique. Si nous écrivons p au lieu de $\vdash p$, nous aurons $\sim p$ au lieu de $-\!| p$, car $\sim p$ signifie alors la même chose que $\sim | \; p$.

Les démonstrations complètes des propositions mathématiques ne sont pas possibles sans l'usage de propositions logiques telles que la contraposition, le syllogisme, le polylemme etc. Qnant aux „démonstrations incomplètes", elles ne sont pas des démonstrations, mais elles en sont seulement des abrégés. J'estime qu'il y a grand

---

[1]) Si a est une classe, nous écrivons, avec M. Peano, $x \varepsilon a$ pour exprimer que x est un élément de a. Supposons que la classe R des classes dont aucune n'est son propre élément, soit une chose déterminée. Voici quelle serait alors la définition de la classe R:

$$K \varepsilon R \supset \sim (K \varepsilon K), \quad \sim (K \varepsilon K) \supset K \varepsilon R.$$

C'est à dire: si une classe quelconque K est un élément de la classe R, alors elle n'est pas son propre élément et, inversement, si une classe quelconque K n'est pas son propre élément, elle est un élément de la classe R. Posons maintenant R au lieu de K. Nous aurons alors

$$R \varepsilon R \supset \sim (R \varepsilon R), \quad \sim (R \varepsilon R) \supset R \varepsilon R.$$

C'est l'aporie remarquable de M. Russell, qui nous montre, il me semble, que notre supposition est (à cause d'intermination de l'univers du discours) fausse.

intérêt à attirer l'attention des logiciens sur le procédé d'abréviation des démonstrations qui consiste à supprimer les chaînons logiques pour passer intuitivement d'un chaînon mathématique au chaînon mathématique suivant. Toutefois les abrégés de démonstrations obtenus par cette voie sont beaucoup trop longs pour l'usage des mathématiciens. Il se pose donc le problème important et difficile à la fois de pousser l'abréviation de la démonstration beaucoup plus loin et pourtant de telle manière, qu'un abrégé de démonstration permette de rétablir la démonstration d'après des règles fixes.

Les chaînons logiques que, selon nous, il y a lieu de supprimer dans les démonstrations mathématiques proprement dites, mais que l'on est obligé de conserver dans les recherches sur les fondements de la Mathématique, reposent sur les prémisses logiques, lesquelles sont fournies par la théorie de la déduction. C'est de cette théorie que, pour terminer, je me propose de dire quelques mots. Elle est extrêmement remarquable en ce que, dans le domaine qui lui est propre, la science dispose de moyens simples et sûrs, permettant de vérifier l'exactitude d'une proposition arbitrairement donnée et permettant, par cela même, aussi de découvrir des propositions nouvelles.

La théorie de la déduction est la théorie des conjonctions „et“ et „ou“. Nous écrivons avec les auteurs de „Principia mathematica: „.“ et „∨“ au lieu de „et“ et „ou“. Nous adoptons à titre d'axiomes les propositions que l'on pourra regarder (après les explications que nous donnerons dans un instant) comme rassemblées dans les tableaux suivants:

(1)

	p	$\sim p$	$\vdash p$	$\dashv p$
1	+	—	+	—
2	—	+	—	+

(2)

	p	q	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
1	+	+	+	+	+	+
2	+	—	—	+	—	—
3	—	+	—	+	+	—
4	—	—	—	—	+	+

Les signes „+“ et „—“ incrits dans une colonne remplacent respectivement les assertions que la proposition marquée en haut de la colonne est vraie ou fausse; le premier tableau contient des propositions faisant respectivement connaître des conséquences de la vérité et de la fausseté de p. Le second tableau fait connaître des conséquences des diverses combinaisons de la vérité et de la fausseté des propositions p et q. D'après cela par exemple la troisième ligne du tableau (2) exprime les quatre propositions suivantes: 1° lorsque, p étant faux, q est vrai, la proposition $p . q$ est fausse. 2° dans la même hypothèse, la proposition $p \vee q$ est vraie, 3° toujours dans la même hypothèse, la proposition $p \supset q$ est vraie, 4° enfin encore dans la même hypothèse, la proposition $p \equiv q$ est fausse. S'il y a plus de deux propositions on procéde de la même manière.

Voici quelques exemples de l'application des tableaux précédents. Examinons en premier lieu si la proposition

$$p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$$

est vraie. En vertu des tableaux (1) et (2) nous avons le tableau suivant:

p	q	$p \supset q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \supset \sim p$	$p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$
+	+	+	—	—	+	+
+	—	—	+	—	—	+
—	+	+	—	+	+	+
—	—	+	+	+	+	+

Nous expliquons seulement la formation de la colonne pour $\sim q \supset \sim p$ au moyen des colonnes pour $\sim q$ et pour $\sim p$. Cela se fait d'après la règle renfermée dans le tableau (2), qui exprime que dans la colonne pour l'implication il faut poser le signe „—“ seulement dans le cas où l'hypothèse de l'implication a le signe „+“ et la thèse le signe „—“. Ce tableau nous apprend que la proposition qu'il faudrait examiner est vraie.

Comme second exemple, envisageons la proposition

$$q . \supset . p \supset q .$$

Nous avons

p	q	$p \supset q$	$q . \supset . p \supset q$
+	+	+	+
+	−	−	+
−	+	+	+
−	−	+	+

Donc la proposition est vraie

Comme 3-me exemple cherchons à vérifier l'équivalence des propositions $\sim \vdash p$ et $\vdash \sim p$ et aussi des propositions $\sim \dashv p$ et $\dashv \sim p$. Nous avons:

p	$\sim p$	$\vdash p$	$\dashv p$	$\sim \vdash p$	$\vdash \sim p$	$\sim \dashv p$	$\dashv \sim p$	$\sim \vdash p \equiv \vdash \sim p$	$\sim \dashv p \equiv \dashv \sim p$
+	−	+	−	−	−	+	−	+	+
−	+	−	+	+	+	−	+	+	+

Donc les propositions examinées sont vraies.

Dans les exemples précédents nous avons examiné des propositions qui se sont trouvées être vraies. Assurons-nous maintenant que la proposition

$$p . \supset . p \supset q$$

est fausse. Nous avons le tableau suivant:

p	q	$p \supset q$	$p . \supset . p \supset q$
+	+	+	+
+	−	−	−
−	+	+	+
−	−	+	+

Tous les signes de la dernière colonne n'étant pas „+", la proposition examinée est bien fausse.

Il me semble intéressant du faire remarquer que la machine logique de Jevons à quatre termes permet (comme je l'explique dans un article devant paraître prochainement en langue polonaise) d'effectuer, sans aucun raisonnement, la vérification de toute proposition d'une théorie de la déduction qui (comme celle de „Principia mathematica") ne renferme pas plus de quatre termes.

Les constantes caractéristiques du noyau $\frac{\partial}{\partial u}$ arc tg $\frac{y(u) - y(t)}{x(u) - x(t)}$

par

Włodzimierz Stożek.

Soit (C) une courbe plane fermée sans points multiples dont les coordonnées rectangulaires sont des fonctions uniformes d'un seul paramètre, de sorte qu'on peut poser:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ désignent des fonctions dont les premières dérivées sont continues. Nous supposons de plus que la courbure de cette ligne, considérée comme fonction du paramètre t reste finie pour toutes les valeurs de t.

Désignons:

1) par (o, l) l'intervalle, dans lequel varie le paramètre t, lorsque le point (x, y) correspondant à ce paramètre, décrit une fois la courbe (C) dans le sens positif.

2) par $f(p)$ une fonction des coordonnées rectangulaires x et y du point p.

3) par r_{pt} la distance du point p à celui des points de la ligne (C) qui correspond au paramètre t.

4) par w_+ et w_- les valeurs périphériques intérieure et extérieure de la fonction $w(p)$ par rapport à la courbe (C), c'est à dire les limites respectives de la fonction $w(p)$ lorsque le point p tend

vers un point de la courbe (C) sans sortir du domaine intérieur ou extérieur limité par la courbe considérée.

5) par $\frac{dv}{dn_+}$ et $\frac{dv}{dn_-}$ les dérivées normales d'une fonction $v(p)$ calculées, la première pour le côté intérieur de la ligne (C) et la seconde pour le côté extérieur, la normale elle même étant, dans les deux cas, dirigée vers l'intérieur du domaine limité par la courbe (C).

On sait que le problème fondamental de la théorie du potentiel logarithmique est le suivant:

Établir l'existence d'un potentiel de simple couche et celle d'une double couche, vérifiant respectivement les équations suivantes:

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_-} - \frac{1-\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_+} = f(s)$$

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda} w_+(s) - \frac{1-\lambda}{2\lambda} w_-(s) = f(s)$$

où λ représente un paramètre variable et $f(s)$ une fonction donnée, continue dans l'intervalle (o, l) et telle que l'on ait:

$$f(o) = f(l)$$

Les problèmes en question se ramènent à deux équations intégrales associées:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu(s) + \lambda \int_o^l K(st)\, \mu(t)\, dt = f(s) \\ &\nu(s) + \lambda \int_o^l \nu(t)\, K(ts)\, dt = f(s) \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(2) \qquad K(st) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\ tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}.$$

On aura, remarquons le, dès maintenant:

$$(3) \qquad \int_o^l K(ts)\, dt = 1$$

Si λ n'est pas une constante caractéristique des équations (1) chacune d'elles admet une solution unique. Il résulte de la théorie des équations intégrales que les fonctions $\mu(s)$ et $\nu(s)$ considérées

comme fonctions de la variable λ sont des fonctions uniformes dans tout le plan de la variable complexe λ, n'admettant, à distance finie, d'autres points singuliers que des pôles.

M. Plemelj[1]) a posé la question de savoir s'il existe des courbes (C) pour lesquelles les équations intégrales (1) possédent un nombre limité de constantes caractéristiques.

Voici la réponse à cette question:

Pour chaque courbe (C) excepté le cercle, les équations intégrales (1) possédent une infinité de constantes caractéristiques.

Pour démontrer ce théorème nous allons nous appuyer sur les théorèmes suivants bien connus ou faciles à démontrer:

I. Chaque fonction continue $h(s)$ qui vérifie les relations:

$$\int_0^l \int_0^l \log r_{st}\, h(s)\, h(t)\, ds\, dt = 0$$

$$\int_0^l h(t)\, dt = 0$$

est identiquement nulle.

II.[2]) Le noyau $\dfrac{\partial}{\partial u}$ arc tg $\dfrac{y(u) - y(t)}{x(u) - x(t)}$ est symétrisable, puisque la fonction $g(st)$ définie par la formule:

$$g(st) = \int_{(C)} \log r_{su} \frac{\partial}{\partial u} \text{arc tg} \frac{y(u) - y(t)}{x(u) - x(t)} du$$

est une fonction symétrique par rapport aux variables s et t.

III.[3]) Les constantes caractéristiques des équations associées (1) sont réelles; parmi elles $\lambda = -1$ est la constante caractéristique de valeur absolue minima ainsi que de degré de multiplicité et de rang 1.

IV. La seule courbe, pour laquelle les équations intégrales

---

[1]) Dr. Josef Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911. pag. 71.

[2]) Dr. Josef Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911. pag. 27.

[3]) Dr. Josef Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911. pag. 52.

(1) possédent seulement la constante caractéristique — 1, est le cercle.

V. [1]) Si λ_0 est une constante caractéristique et $\varphi_0(s)$ une fonction fondamentale de l'équation intégrale homogène:

$$\varphi_0(s) + \lambda_0 \int_0^l \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} \varphi_0(t)\, dt = 0$$

l'expression

$$\psi_0(s) = \int_0^l \log r_{su}\, \varphi_0(u)\, du$$

est une fonction fondamentale de l'équation intégrale associée.

VI. [2]) Si deux noyaux $K_1(st)$ et $K_2(st)$ sont continus dans chaque point du domaine $\left(o \leqq \frac{s}{t} \leqq l\right)$, excepté peut-être sur la ligne $s = t$, lorsque, de plus, les intégrales

$$\int_0^l \int_0^l \{K_1(st)\}^2\, ds\, dt, \quad \int_0^l \int_0^l \{K_2(st)\}^2\, ds\, dt$$

ont un sens, lorsqu'en outre on a identiquement

$$\int_0^l K_1(su)\, K_2(ut)\, du \equiv 0$$

ou

$$\int_0^l K_2(su)\, K_1(ut)\, du \equiv 0$$

alors l'ensemble des constantes caractéristiques du noyau $K_1(st) + K_2(st)$ est la somme des ensembles de constantes caractéristiques des noyaux $K_1(st)$ et $K_2(st)$.

VII. [3]) Un noyau de la forme $\Phi_1(s)\, \Psi_1(t) + \ldots \Phi_n(s)\, \Psi_n(t)$, où les fonctions $\Phi_p(s)$ et $\Psi_p(t)$ sont à carré sommables, peut posséder au plus n constantes caractéristiques.

---

[1]) Trajan Lalesco. Introduction à la Théorie des Equations intégrales. Paris 1912. Pag. 78 et 79.

[2]) Trajan Lalesco. Introduction à la Théorie des Équations intégrales Paris 1912 Pag. 41.

[3]) Trajan Lalesco. Introduction à la Théorie des Équations intégrales. Paris 1912. Pag. 61.

VIII.[1]) Si le noyau $\frac{\partial}{\partial s}$ arc tg $\frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$ posséde un nombre limité des constantes caractéristiques $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$, il est nécessairement de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\, \psi_k(t)}{-\lambda_k}$$

Passons maintenant à la démonstration de notre théorème. Selon le théorème (III) le nombre -1 est la constante caractéristique du noyau (2) et par conséquent il existe une fonction $\varphi(s) = m(s)$ qui vérifie l'équation intégrale homogène:

(4) $$\varphi(s) - \int_0^l K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

Observons que la fonction $m(s)$ posséde, à cause de la périodicité de la fonction $K(st)$, la période l.

Dans l'équation homogène associée:

$$\psi(s) - \int_0^l \psi(t)\, K(ts)\, dt = 0$$

on peut prendre comme fonction fondamentale $\psi(s) = 1$, comme cela résulte de l'égalité (3).

Les fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ remplissent la condition:

$$\int_0^l \varphi(t)\, \psi(t)\, dt = 1$$

c'est à dire:

(5) $$\int_0^l m(t)\, dt = 1$$

On a aussi d'après le théorème (V)

(6) $$\int_0^l \log r_{su}\, m(u)\, du = \text{Const.}$$

Posons

(7) $$K(st) = m(s) + A(st)$$

en vertu de (4), (5) et (7), on aura:

(8) $$\int_0^l A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

---

[1]) W. Stożek. Rozprawy Polskiego Tow matem. p. 90.

En outre (7) et (3) donnent:

$$\int_0^l A(ts)\,dt \equiv 0$$

Si nous posons:

$$n(s) = \frac{s}{l} - \int_0^l m(t)\,dt \tag{9}$$

on déduit de la relation (5):

$$\int_0^l \frac{dn(s)}{ds}\,ds = 0$$

La fonction $n(s)$ est périodique avec la période l.

Les équations (2), (7) et (9) donnent:

$$A(st) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arc\,tg}\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)} + \frac{dn(s)}{ds} - \frac{1}{l}$$

Pour définir sans ambiguité, dans le domaine $\left(o \leqq {s \atop t} \leqq l\right)$, la détermination $N(st)$ de la fonction multiforme:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$$

nous fixerons le sens positif sur la courbe (C) comme on le fait ordinairement dans la théorie des fonctions et nous supposerons qu'au point $t = 0$ la tangente à la courbe (C) est parallèle à l'axe des x et que le sens de parcours positif sur la courbe (C) correspond à la croissance du paramètre t. Cela posé nous définirons la fonction $N(st)$ par les trois conditions suivantes:

1⁰ On prendra

$$N(o, o) = 0$$

2⁰ Pour $t \leqq s$ nous regarderons $N(st)$ comme égale à la plus petite détermination non négative de la fonction

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$$

3⁰ Pour $s < t$, nous poserons

$$N(st) = N(ts)$$

La fonction $N(st)$ étant définie dans le domaine $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$, nous en étendrons la définition à tout le plan (st), en posant:

$$N(st) = N(s't') + (k + n)\pi$$

où s' et t' sont définis par la condition de vérifier les relations:

$$o \leqq s' < l, \quad o \leqq t' < l$$
$$s = s' + k.l, \quad t = t' + n.l$$

où k et n représentent les entiers.

Il résulte des hypothèses faites au sujet de la courbe (C) que la fonction $N(st)$ est bornée et pour $s \neq t$ elle possède des dérivées partielles du premier ordre.

En outre:

(10) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial s} \text{ arc tg } \dfrac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = \dfrac{\partial}{\partial s} N(st) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \text{ arc tg } \dfrac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = \dfrac{\partial}{\partial t} N(st) \end{array} \right.$$

Posons:

(11) $$Q(st) = N(st) - \frac{(s+t)\pi}{l}$$

La fonction $Q(st)$ est périodique et symétrique par rapport aux variables s et t, c'est à dire:

(12) $$Q(s + k.l,\ t + nl) = Q(st) = Q(ts)$$

D'après (2), (10) et (11) on a:

(13) $$K(st) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial Q(st)}{\partial s} + \frac{1}{l}$$

En portant cette expression dans la formule (3), nous trouvons:

$$\int_o^l \frac{\partial Q(st)}{\partial t} dt = 0$$

Si l'on porte la valeur (7) du $K(st)$ dans (13), en ayant égard à (9), on trouve:

$$A(st) = \frac{\partial}{\partial s}\left[n(s) + \frac{1}{\pi} Q(st)\right]$$

On aura donc:

(14)
$$A(st) = \frac{\partial}{\partial s} P(st)$$

en posant

(15)
$$P(st) = n(s) + n(t) + \frac{1}{\pi} Q(st)$$

La fonction $A(st)$ jouit des propriétés suivantes:

1) Elle est la dérivée partielle du premier ordre d'une fonction symétrique des variables s et t [formule (11)] et périodique par rapport à ces variables avec la période l [formules (12), (4) et (9)].

2) Elle est symétrisable par composition avec $\log r_{su}$ [théorème II, formules (6) et (7)].

3) Au nombre — 1 près, l'ensemble des constantes caractéristiques du noyau $A(st)$ est identique à l'ensemble des constantes caractéristiques du noyau $K(st)$ [théorèmes III, VI, formules (7) et (8)]. Il résulte de la dernière des propositions précédentes que, pour établir notre théorème nous pouvons substituer le noyau $A(st)$ au noyau $K(st)$. D'autre part, il résulte de (14) que les ensembles de constantes caractéristiques des noyaux $A(st)$ et $P(st)$ sont à la fois finis ou infinis [théorème VII, VIII]. Nous pouvons donc, dans notre théorème, considérer la fonction $P(st)$ au lieu de $K(st)$. Supposons que le noyau P(st) possède un nombre limité de constantes caractéristiques, que nous désignons par $-\lambda_1 - \lambda_2 \ldots - \lambda_n$ (quelques unes peuvent être égales entr'elles) et soient $\varphi_1(s)\, \varphi_2(s) \ldots \varphi_n(s)$ les fonctions fondamentales correspondantes qui en vertu de (10) (11) et (15) ont la première dérivée continue.

Nous aurons:

(16)
$$P(st) = \frac{\varphi_1(s)\, \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\, \varphi_2(t)}{\lambda_2} + \ldots \frac{\varphi_n(s)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

avec

(17)
$$\int_0^l \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

Remarquons encore que les fonctions $\varphi_p(s)$ sont périodiques avec la période l.

D'après la première et la seconde propriété de la fonction $A(st)$ nous pouvons poser:

$$\int_o^l \log r_{su} \frac{\partial}{\partial u} P(ut)\, du = h(st) \tag{18}$$

où $h(st)$ est une fonction symétrique par rapport aux variables s et t.

Substituons l'expression (16) dans l'équation (18); nous obtiendrons:

$$\int_o^l \log r_{su} \left[\frac{\varphi'_1(u)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi'_2(u)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots \frac{\varphi'_n(u)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}\right] du = \tag{19}$$

$$\frac{\psi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\psi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots \frac{\psi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n} = h(st)$$

où

$$\psi_p(s) = \int_o^l \log r_{su}\, \varphi'_p(u)\, du \quad (p = 1, 2, \dots n) \tag{20}$$

Puisque la fonction $h(st)$ est symétrique

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\psi_p(s)\,\varphi_p(t)}{\lambda_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\psi_p(t)\,\varphi_p(s)}{\lambda_p}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par la fonction $\varphi_k(s)$ et intégrant de o à l, on aura d'après (17):

$$\psi_k(t) = a_{k_1}\,\varphi_1(t) + a_{k_2}\,\varphi_2(t) + \dots a_{kn}\,\varphi_n(t) \quad (k = 1, 2, \dots n) \tag{21}$$

où

$$a_{kp} = \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \int_o^l \varphi_k(u)\, \psi_p(u)\, du \quad (k, p = 1, 2, \dots n) \tag{22}$$

D'après (21) on a encore

$$a_{kp} = \int_o^l \psi_k(u)\, \varphi_p(u)\, du \tag{23}$$

Pareillement nous pouvons écrire:

$$a_{pk} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k} \int_o^l \varphi_p(u)\, \psi_k(u)\, du \tag{24}$$

$$a_{pk} = \int_0^l \psi_p(u)\, \varphi_k(u)\, du \tag{25}$$

En comparant les relations (22) et (23) et puis (24) et (25) nous trouvons

$$\frac{a_{kp}}{\lambda_k} = \frac{a_{pk}}{\lambda_p} \quad (k, p = 1, 2, \ldots n) \tag{26}$$

Posons

$$b_{kp} = \frac{a_{kp}}{\lambda_k} \tag{27}$$

D'où en tenant compte de la relation (26)

$$b_{kp} = b_{pk}$$

Les relations (20), (21) et (27) nous donnent

$$b_{k_1} \varphi_1(s) + b_{k_2} \varphi_2(s) + \ldots b_{kn} \varphi_n(s) = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^l \log r_{su} \varphi'_k(u) du \; (k=1,2 \ldots n) \tag{28}$$

D'où l'on tire par des calculs simples:

$$b_{k_1} \int_0^l \log r_{su} \varphi'_1(u)\, du + b_{k_2} \int_0^l \log r_{su} \varphi'_2(u)\, du + \ldots b_{kn} \int_0^l \log r_{su} \varphi'_n(u) du =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^l \log r_{su}\, \psi'_k(u)\, du$$

ou selon la relation (20):

$$b_{k_1} \psi_1(s) + b_{k_2} \psi_2(s) + \ldots b_{kn} \psi_n(s) = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^l \log r_{su}\, \psi'_k(u)\, du$$

Nous distinguerons dans la suite trois cas.

Premier cas.

L'équation:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \frac{z}{\lambda_1} & b_{21} \ldots b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} - \frac{z}{\lambda_2} \; b_{n2} \\ \cdot\; \cdot\; \cdot & \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} \ldots b_{nn} - \frac{z}{\lambda_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

admet au moins une racine réelle $z = \alpha$, où α est différent de zéro.

Les équations

(30) $$b_{1k} x_1 + b_{2k} x_2 + \ldots \left(b_{kk} - \frac{a}{\lambda_k}\right) x_k + \ldots\ b_{nk} x_n = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

admettent une solution $x_p = x_p^0$, où tous les x_p^0 ne sont pas nuls. Multiplions les équations (30) respectivement par $x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0$ et ajoutons les membre à membre; il viendra:

(31)
$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k1}\ x_k^0\right) \varphi_1(s) + \ldots \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kn}\ x_k^0\right) \varphi_n(s) = \frac{1}{\alpha} \int_0^l \log r_{su} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha x_k^0}{\lambda_k} \varphi_k'(u) \right\} du$$

En posant:

$$F_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha x_k^0}{\lambda_k} \varphi_k(s)$$

on tire de (31):

(32) $$F_n(s) = \frac{1}{\alpha} \int_0^l \log r_{su}\, F_n'(u)\, du$$

La fonction $F_n(s)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_p(s)$ $(p = 1, 2, \ldots n)$ et par conséquent elle est périodique avec la période l et possède une dérivée du premier ordre continue.

En multipliant la relation (32) par $F_n'(s)$ et intégrant de o à l, on aura:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^l \int_0^l \log r_{su}\, F_n'(u)\, F_n'(s)\, du\, ds = \int_0^l F_n(s)\ F_n'(s)\, ds = 0$$

En utilisant le théorème (I) on tire de cette égalité:

$$F_n'(s) \equiv 0$$

qui exprime que, contre l'hypothèse, les fonctions $\varphi_p(s)$ vérifient identiquement une combinaison linéaire à coëfficients non tous nuls des fonctions $\varphi_p(s)$.

Deuxième cas.

L'équation (29) admet une racine complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$ où b est différent de zéro.

L'égalité (32) subsistera encore dans le cas actuel, mais une modification des considérations antérieures devient nécessaire, puisque nous avons maintenant:

$$F_n(s) = \Phi_n(s) + \mathrm{i}\, \Psi_n(s)$$

où i est l'unité imaginaire, $\Phi_n(s)$ et $\Psi_n(s)$ étant des combinaisons linéaires à coefficients réels et non tous nuls des $\varphi_p(s)$.

Pour achever de mettre en évidence les quantités réelles et imaginaires, nous poserons

$$\alpha = a + \mathrm{i}\, b$$

en désignant par a et b des nombres réels, définis plus haut. Dans ces conditions l'équation (32) donne:

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} a\,\Phi_n(s) - b\,\Psi_n(s) &= \int_0^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, du \\ b\,\Phi_n(s) + a\,\Psi_n(s) &= \int_0^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, du \end{aligned} \right.$$

en posant:

$$\Phi_n(s) = v_1\, \varphi_1(s) + v_2\, \varphi_2(s) + \ldots\, v_n\, \varphi_n(s)$$
$$\Psi_n(s) = w_1\, \varphi_1(s) + w_2\, \varphi_2(s) + \ldots\, w_n\, \varphi_n(s)$$

où les v_k et les w_k sont des constantes réelles, non toutes nulles. Les fonctions $\Phi_n(s)$ et $\Psi_n(s)$ ne sont évidemment pas nulles toutes les deux.

Cela posé je dis qu'il n'existe aucun système de deux constantes A et B, non nulles à la fois, telles que l'on ait identiquement:

$$A\,\Phi_n(s) + B\,\Psi_n(s) \equiv 0$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Dans ce cas on tirerait de (33) les égalités suivantes:

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} (aB + bA)\,\Phi_n(s) &= B \int_0^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, du \\ (aA - bB)\,\Psi_n(s) &= A \int_0^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, du \end{aligned} \right.$$

En multipliant la première équation par $\Phi'_n(s)$ et la seconde par $\Psi'_n(s)$ et intégrant de o à l, nous trouvons en remarquant encore que les fonctions $\Phi_n(s)$ et $\Psi_n(s)$ sont périodiques avec la période l:

$$\int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Phi'_n(s)\, du\, ds = 0$$

$$\int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, \Psi'_n(s)\, du\, ds = 0$$

d'où d'après le théorème I:

$$\Phi'_n(s) \equiv 0$$
$$\Psi'_n(s) \equiv 0$$

De ces équations et des relations (34) on déduit:

$$aB + bA = 0$$
$$-bB + aA = 0$$

Le déterminant de ces équations étant égal à $a^2 + b^2$, il est impossible qu'elles soient vérifiées par un système de valeurs non nulles à la fois de A et B. Notre assertion est donc établie. Revenons maintenant aux équations (33).

Multiplions la première équation par $\Psi'_n(s)$, la seconde par $\Phi'_n(s)$ et intégrons de o à l. Nous trouvons:

$$a\int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = \int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Psi'_n(s)\, du\, ds$$

$$a\int_o^l \Psi_n(s)\, \Phi'_n(s)\, ds = \int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Psi'_n(s)\, du\, ds$$

d'où

(35) $$a\int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = a\int_o^l \Psi_n(s)\, \Phi'_n(s)\, ds$$

Si a est différent de zéro l'égalité (35) et l'égalité élémentaire

$$\int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = \int_o^l \Phi'_n(s)\, \Psi_n(s)\, ds = \int_o^l [\Phi_n(s)\, \Psi_n(s)]'\, ds = 0$$

donneraient:

$$(36)\qquad \int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = \int_o^l \Phi'_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = 0$$

Multiplions maintenant la première équation (33) par $\Phi'_n(s)$ et intégrons de o à l D'après (36) on a:

$$\int_o^l \int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Phi'_n(s)\, du\, ds = 0$$

d'où par le théorème I:

$$\Phi'_n(u) \equiv 0$$

et d'une façon analogue:

$$\Psi'_n(u) \equiv 0$$

En intégrant ces deux identités, nous obtiendrons:

$$\Phi_n(u) \equiv \text{const}$$

$$\Psi_n(u) \equiv \text{const}$$

c'est à dire qu'il existe une combinaison linéaire entre $\Phi_n(u)$ et $\Psi_n(u)$, ce qui est impossible comme nous l'avons démontré plus haut. Si a est égal à zéro. le système (33) se réduit à:

$$-b\, \Psi_n(s) = \int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, du$$

$$b\, \Phi_n(s) = \int_o^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, du$$

En portant la valeur de la fonction $\Psi_n(s)$, tirée de la première équation, dans la seconde, en multipliant ensuite par $\Phi'_n(s)$ et en intégrant do o à l, on trouvera:

$$\int_o^l \int_o^l \int_o^l \log r_{su} \log r_{ut}\, \Phi'_n(s)\, \Phi'_n(t)\, du\, ds\, dt = 0$$

ou

$$\int_o^l \left\{ \int_o^l \log r_{st}\, \Phi'_n(t)\, dt \right\}^2 ds = 0$$

d'où

$$\int_0^l \log r_{st}\, \Phi'_n(t)\, dt = 0$$

et d'une façon analogue:

$$\int_0^l \log r_{st}\, \Psi'_n(t)\, dt = 0$$

Ces deux égalités entraînent d'après le théorème I:

$$\Phi'_n(t) \equiv 0$$
$$\Psi'_n(t) \equiv 0$$

ce qui est impossible, comme nous l'avons vu plus haut.

Troisième cas.

Le déterminant $|b_{pk}|$ $(p, k = 1, 2 \ldots n)$ est égal à zéro.

Les égalités (21) et (27) nous apprennent qu'il existe une relation de la forme:

$$e_1 \psi_1(s) + e_2 \psi_2(s) + \ldots e_n \psi_n(s) \equiv 0$$

où les e_p sont des constantes réelles, non toutes nulles.

De là et des relations (20) on déduit au moyen du théorème I que l'on a:

(37) $$e_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \ldots e_n \varphi_n(s) = e_0$$

où e_0 est une nouvelle constante réelle.

Supposons par exemple que e_n soit différent de zéro. En substituant alors la valeur de la fonction $\varphi_n(s)$ tirée de l'équation (37) dans les $n-1$ premières relations (28), nous trouverons:

(38) $$c_{k1}\varphi_1(s) + c_{k2}\varphi_2(s) + \ldots c_{k,n-1}\varphi_{n-1}(s) + c_{kn} = \int_0^l \log r_{su}\, \varphi'_k(u)\, du$$

$$(k = 1, 2, \ldots n-1)$$

où les c_{kp} sont des constantes réelles.

L'équation:

(39) $$\begin{vmatrix} c_{11} - z & c_{21} \ldots & c_{n-1,1} \\ c_{12} & c_{22} - z & c_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,n-1} & c_{2,n-1} & c_{n-1,n-1} - z \end{vmatrix} = 0$$

ne peut posséder une racine $z = 0$. Dans ce cas il existerait, comme cela résulte des équations (38) et du théorème (I) une relation de la forme:

$$(40) \qquad d_1 \varphi_1(s) + d_2 \varphi_2(s) + \dots d_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}(s) = d_0$$

où d_k $(k = 0, 1, \dots n-1)$ sont des constantes réelles, non toutes nulles. Les relations (37) et (40) sont indépendantes et par conséquent il existe une relation linéaire et homogène entre les $\varphi_p(s)$ contrairement à l'hypothèse que nous avons faite plus haut. Si l'équation (39) a une racine $z = a_1$, où a_1 est un nombre réel, différent de zéro, la méthode que nous avons appliquée dans le premier cas nous donne:

$$(41) \qquad F_{n-1}(s) = \frac{1}{a_1} \int_0^l \log r_{su} \, F'_{n-1}(u) \, du$$

où

$$(42) \qquad F_{n-1}(s) = \alpha_1 \varphi_1(s) + \dots \alpha_{n-1} \varphi_{n-1}(s) + \alpha_0$$

en désignant par α_i $(i = 0, 1, 2 \dots n-1)$ les constantes réelles, non toutes nulles.

Si l'équation (39) a une racine $z = a_1 + i\, b_1$, en procédant comme dans le deuxième cas, nous trouvons:

$$(43) \qquad \begin{cases} a_1 \, \Phi_{n-1}(s) - b_1 \, \Psi_{n-1}(s) = \displaystyle\int_0^l \log r_{su} \, \Phi'_{n-1}(u) \, du \\ b_1 \, \Phi_{n-1}(s) + a_1 \, \Psi_{n-1}(s) = \displaystyle\int_0^l \log r_{su} \, \Psi'_{n-1}(u) \, du \end{cases}$$

où $\Phi_{n-1}(s)$ et $\Psi_{n-1}(s)$ sont, comme la fonction $F_{n-1}(s)$, des combinaisons linéaires de $\varphi_1(s) \dots \varphi_{n-1}(s)$ avec les coefficients réels, non tous nuls.

Nous avons reconnu plus haut que (32) entraîne la relation:

$$F'_n(s) \equiv 0$$

pour toutes les valeurs de s. Nous avons reconnu aussi qu'en vertu des égalités (33) on a identiquement:

$$\Phi'_n(s) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \Psi'_n(s) \equiv 0$$

D'une façon tout à fait analogue on déduira des égalités (41) et (43) que l'on a

(44) $$F'_{n-1}(s) \equiv 0$$

ainsi que

(45) $$\Phi'_{n-1}(s) \equiv \Psi'_{n-1}(s) \equiv 0$$

pour toutes les valeurs de s.

Il résulte de (44) que

$$F_{n-1}(s) \equiv \text{Const.}$$

Or, cette relation et la relation (37) entraîneraient l'existence d'une relation linéaire et homogène entre les $\varphi_p(s)$ ce qui, par hypothèse, est impossible. Cela prouve qu'au cas où le nombre des constantes caractéristiques serait fini, l'équation (39) ne peut pas avoir de racines réelles. D'autre part si (39) avait une racine complexe, on aurait les relations (45). Donc, dans ce cas on aurait

$$\Phi_{n-1}(s) = \text{Const.} \quad \Psi_{n-1}(s) = \text{Const.}$$

Mais chacune des fonctions $\Phi_{n-1}(s)$ et $\Psi_{n-1}(s)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions:

$$\varphi_1(s) \ldots \varphi_{n-1}(s)$$

donc, à cause de (37) il existerait encore une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions

$$\varphi_1(s) \ldots \varphi_n(s)$$

ce qui, par hypothèse, est impossible.

En résumé l'hypothèse que, pour une courbe (C) qui n'est pas un cercle, le nombre des constantes caractéristiques du noyau $P(st)$ est fini, entraîne dans tous les cas une contradiction. Donc lorsque la courbe (C) n'est pas un cercle, le noyau $P(st)$ et par conséquent le noyau $A(st)$ admettent une infinité des constantes caractéristiques. Il en est de même dans le cas considéré du noyau $K(st)$.

C. Q. F. D.

Przyczynek do teorji form.

Napisał

Włodzimierz Stożek.

Twierdzenie: Jeśli dane jest n^2 liczb rzeczywistych $e_{pq} (p, q = 1, 2, \dots n)$, które czynią zadość następującym warunkom:

$$e_{pq} = \sum_{r=1}^{n} e_{pr}\, e_{rq} \quad (p, q = 1, 2 \dots n) \tag{1}$$

to suma $I_n = \sum_{r=1}^{n} e_{pp}$ jest liczbą całkowitą, nieujemną, która nie przekracza liczby n. Jeśli w szczególnym wypadku $I_n = 0$, to wówczas wszystkie $e_{pq} (p, q = 1, 2 \dots n)$ równają się zeru, a jeśli $I_n = n$, to wówczas wszystkie $e_{pp} (p = 1, 2 \dots n)$ równają się jedności, a wszystkie $e_{pq} (p \neq q) (p, q = 1, 2 \dots n)$ są równe zeru.

Dowód:

Uważajmy równanie pomocnicze:

$$A_n(x) = \begin{vmatrix} e_{11} - x, & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22} - x & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1}, & e_{n2} & \dots & e_{nn} - x \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

Równanie to nie posiada innych pierwiastków, jak tylko zero lub jedność.

Aby to wykazać, przyjmijmy, że $\alpha +$ i β jest pierwiastkiem

zespolonym tego równania. Wówczas istnieją liczby zespolone $l_p + i\, m_p$ $(p = 1, 2, \ldots n)$, które czynią zadość następującym równaniom:

$$
\begin{array}{l}
[e_{11} - (\alpha + i\beta)](l_1 + im_1) + \ldots \; e_{1n}(l_n + im_n) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_{q1}(l_1 + im_1) + \ldots [l_{qq} - (\alpha + i\beta)](l_q + im_q) + \ldots e_{qn}(l_n + im_n) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_{n1}(l_1 + im_1) + \ldots \qquad [e_{nn} - (\alpha + i\beta)](l_n + im_n) = 0
\end{array}
$$

Wynika stąd, że liczby rzeczywiste $l_1 \ldots l_n$ i $m_1 \ldots n_n$, które nie wszystkie równają się zeru, spełniają odpowiednio dwa następujące systemy równań:

$$
\left.\begin{array}{ll}
(3) & e_{q1} l_1 + e_{q2} l_2 + \ldots \; e_{qn} l_n - \alpha l_q + \beta m_q = 0 \\
(4) & e_{q1} m_1 + e_{q2} m_2 + \ldots \; e_{qn} m_n - \alpha m_q - \beta l_q = 0
\end{array}\right\} (q = 1, 2 \ldots n)
$$

Pomnóżmy w systemie (3), względnie (4), równanie o wskaźniku q przez e_{pq} i dodajmy je ze względu na wskaźnik q od 1 do n. to otrzymamy po uwzględuieniu związku (1):

$$
\left.\begin{array}{l}
(1 - \alpha)[e_{p1} l_1 + \ldots \; e_{pn} l_n] + \beta [e_{p1} m_1 + \ldots \; e_{pn}] = 0 \\
(1 - \alpha)[e_{p1} m_1 + \ldots \; e_{pn} m_n] + \beta [e_{p1} l_1 + \ldots \; e_{pn} l_n] = 0
\end{array}\right\} (p = 1, 2 .. n)
$$

albo:

$$
\left.\begin{array}{l}
[(1 - \alpha)^2 + \beta^2](e_{p1} l_1 + \ldots \; e_{pn} l_n) = 0 \\
[(1 - \alpha)^2 + \beta^2](e_{p1} m_1 + \ldots \; e_{pn} m_n) = 0
\end{array}\right\} (p = 1, 2 \ldots n)
$$

Z ostatnich równań wynika, że zachodzić mogą dwa wypadki:

$$
\text{I.} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0
$$

$$
\text{II.} \quad \left.\begin{array}{l}
e_{p1} l_1 + \ldots \; e_{pn} l_n = 0 \\
e_{p1} m_1 + \ldots \; e_{pn} m_n = 0
\end{array}\right\} (p = 1, 2, \ldots n)
$$

W przypadku I. równanie (2) posiada jako rozwiązanie jedność.

W przypadku II., po uwzględnieniu równań (3) i (4), znajdujemy:

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha l_p - \beta m_p = 0 \\
\alpha m_p + \beta l_p = 0
\end{array}\right\} (p = 1, 2 \ldots n)
$$

a zatem, ponieważ nie wszystkie l_p, m_p $(p=1,2\ldots n)$ równają się zeru:

$$\alpha=\beta=0.$$

W tym więc wypadku równanie (2) posiada pierwiastek, równy zeru.

Ponieważ równanie (2) innych pierwiastków jak jedność lub zero nie posiada, przeto jego lewa strona da się przedstawić w formie:

$$A_n(x)=(-1)^n x^r (x-1)^{n-r} \tag{5}$$

gdzie r jest liczbą całkowitą, nieujemną.

Rozwińmy wyznacznik (2) wedle potęg x:

$$A_n(x)=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}A_1 x^{n-1}+(-1)^{n-2}A_2 x^{n-2}+\ldots$$
$$+(-1)A_{n-1}x+A_n$$

przyczem A_k oznacza sumę wszystkich minorów głównych, rzędu k, należących do wyznacznika:

$$A=\begin{vmatrix} e_{11}\ldots e_{1n} \\ \ldots\ldots \\ e_{n1}\ldots e_{nn}\end{vmatrix}$$

Przez porównanie współczynników przy x^{n-1} w rozwinięciu i we wyrażeniu (5), otrzymujemy:

$$I_n=n-r \tag{6}$$

Aby wykazać drugą część twierdzenia, przyjmijmy, że $I_n=0$. Wówczas równanie (2) innych pierwiastków jak zero nie posiada, jak to wynika ze związków (5) i (6). W tym wypadku wyznacznik:

$$A_n(1)=\begin{vmatrix} e_{11}-1, e_{12}\ldots e_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ e_{n1}, e_{n2}\ldots e_{nn}-1\end{vmatrix} \tag{7}$$

jest napewne od zera odmienny, a zatem równania jednorodne:

$$(e_{11}-1)x_1+e_{12}x_2+\ldots e_{1n}x_n=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_{n1}x_1+\ldots(e_{nn}-1)x_n=0$$

posiadają jedno rozwiązanie: $x_1=x_2=\ldots x_n=0$.

Ponieważ z drugiej strony ze związków (2) wynika, że możemy przyjąć jako rozwiązanie tego systemu równań $x_1=e_{p1}$,

$x_2 = e_{p2} \ldots x_n = e_{pn}$ przy każdem $p = 1, 2 \ldots n$, to wnosimy stąd, że wszystkie $e_{pq} (p, q = 1, 2 \ldots n)$ równają się zeru.

Przypadek, w którym $I_n = n$ można zredukować do poprzedniego. W tym celu połóżmy:

$$(8) \qquad \begin{cases} e'_{pq} = e_{pq} \quad p \neq q \quad (p, q = 1, 2 \ldots n) \\ e'_{pp} = 1 - e_{pp} \quad (p = 1, 2 \ldots n) \end{cases}$$

Mamy:

$$e'_{pq} = \sum_{r=1}^{n} e'_{pr} \, . \, e'_{rq} \quad (p, q = 1, 2 \ldots n)$$

$$I'_n = e'_{11} + \ldots e'_{nn} = n - I_n$$

Ponieważ $I'_n = 0$, więc wszystkie $e'_{pq} (p, q = 1, \ldots n)$ muszą być zerami, a zatem na podstawie (8):

$$e_{pq} = 0 \quad p \neq q \quad (p, q = 1, 2 \ldots n)$$
$$e_{pp} = 1 \quad (p = 1, 2 \ldots n)$$

Wniosek:

Jeżeli dana jest forma bilinarna

$$(9) \qquad \sum_{p,q=1}^{n} e_{pq} \, x_p \, y_q$$

której spółczynniki e_{pq} spełniają związki (1), to liczba I_n określona wyżej określa ilość par funkcji liniowych, zapomocą których forma (9) daje się przedstawić jako tak zwana forma kanoniczna.

Sprawozdanie Zarządu
„POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO"
(za czas od założenia Towarzystwa do 15 marca 1921 r.)

„Polskie Towarzystwo matematyczne" zostało założone w dniu 2 kwietnia 1919 r. początkowo pod nazwą „Towarzystwo matematyczne w Krakowie". Zebranie konstytuujące odbyło się 2 kwietnia 1919 r. przy współudziale następujących członków:

P. St. Banach, J. Chmiel, Dr L. Chwistek, M. Gibas, Dr A. Hoborski, Dr L. Hordyński, L. Kaszycki, Dr F. Leja, O. Nikodym, Dr A Rosenblatt, A. Rozmus, Dr J. Sleszyński, Ks. Stankiewicz, Dr A. Wilk. Dr St. Zaremba i Dr K. Żórawski.

Zebranie zagaił p. Dr K. Żórawski, poczem wybrano p. Dra St. Zarembę przewodniczącym, a Dr F. Leja przedstawił projekt statutu i regulaminu, który z pewnemi zmianami przyjęto. Na podstawie uchwalonego statutu wybrano na okres dwuletni pierwszy Zarząd Towarzystwa w składzie następującym:

Dr St. Zaremba prezes, Dr A. Hoborski zastępca prezesa. Dr F. Leja sekretarz, Dr L Hordyński skarbnik[1]).

Posiedzenia zwyczajne Towarzystwa uchwalono odbywać w pierwszą i trzecią środę każdego miesiąca, z wyjątkiem miesięcy wakacyjnych.

W r. 1920, kiedy do Towarzystwa przystąpiło wielu matematyków z poza Krakowa, rzucono myśl, aby „Towarzystwo matematyczne w Krakowie" zreorganizować i przekształcić je na ogólno-polskie Towarzystwo, któreby mogło połączyć wszystkie istniejące w Polsce Towarzystwa matematyczne np. warszawskie i lwowskie w jedną całość. Myśl ta natrafiała początkowo na pewne trudności związane z brzmieniem mającego się uchwalić nowego

---

[1]) Zmarł w r. 1919. W jego miejsce został wybrany skarbnikiem Dr A. Wilk.

statutu. Po wymianie zdań z członkami poza krakowskich Towarzystw matematycznych uchwalono w końcu na walnem zebraniu w dniu 21 kwietnia 1920 r. zmienić nazwę dotychczasową na nazwę: „Polskie Towarzystwo Matematyczne", a na walnem zebraniu w dniu 22 grudnia 1920 r. uchwalono nowy statut i regulamin, którego przedruk niżej zamieszczamy.

Dotąd odbyło Towarzystwo 24 posiedzeń zwyczajnych, na których wygłosili członkowie następujące referaty:

1. Z teorji funkcji zmiennej rzeczywistej. A. Hoborski.
2. Z rachunku warjacyjnego. Część I. A. Rosenblatt.
3. Z teorji funkcji zmiennej rzeczywistej. St. Banach.
4. Algebra logiki jako nauka dedukcyjna. E. Stamm.
5. Z rachunku warjacyjnego. (Część II). A. Rosenblatt.
6. Z teorji ciągłych grup przekształceń. F. Leja.
7. Z matematyki ubezpieczeń życiowych. B. Babski.
8. Organizacja szkolnictwa we Francji. St. Zaremba.
9. Z rachunku całkowego. (Część I). O. Nikodym.
10. Z rachunku całkowego. (Część II). O. Nikpdym.
11. Z teorji funkcji linji. St. Banach.
12. Z teorji funcji Duhamelowskich. (Część I). W. Wilkosz.
13. Z teorji funkcji Duhamelowskich. (Część II). W. Wilkosz.
14. Z teorji potencjału A. Rosenblatt.
15. Problemy integralne funkcji uwikłanych. W. Wilkosz.
16. Zastosowanie algebry logiki do teorji szyfrów. E. Stamm.
17. Z podstaw logiki matematycznej. (Część I). W. Wilkosz.
18. Z podstaw logiki matematycznej. (Część II). W. Wilkosz.
19. Teorja liczb w algebrze logiki. E. Stamm.
20. Z teorji funkcji dwu zmiennych. W. Wilkosz.
21. Z teorji szeregów potęgowych. A. Rosenblatt.
22. O pojęciu funkcji. W. Wilkosz.
23. Z teorji potencjału. Wł. Stożek.

Sprawozdanie ze stanu finansowego Towarzystwa będzie przedstawione w następnym numerze organu Towarzystwa.

Towarzystwo liczy dotąd 49 członków zwyczajnych, z których dwóch zmarło. Nazwiska czlonków zwyczajnych, w porządku w jakim do Towarzystwa przystąpili wraz z datami przystąpienia do Towarzystwa są następujące:

1. Dr St. Zaremba 2. IV. 1919.
2. Dr J. Sleszyński „
3. Dr K. Żorawski 2. IV. 1919.
4. Dr F. Leja „

5. K. Stankiewicz 2. IV. 1919.
6. J. Chmiel „
7. M. Gibas „
8. A. Rozmus „
9. St. Banach „
10. O. Nikodym „
11. Dr L. Chwistek „
12. Dr A. Wilk „
13. Dr L. Hordyński[1]) „
14. Dr A. Rosenblatt „
15. Dr A. Hoborski „
16. L. Kaszycki „
17. Dr T. Banachiewicz 30. IV. 1919.
18. Włodz. Stożek 30. IV. 1919.
19. G. Leśniodorski „
20. Wł. Ślebodziński „
21. Fr. Brablec „
22. St. Ziobrowski „
23. K. Fijoł „
24. Dr E. Stamm „
25. E. Babski „
26. J. Baran 7. V. 1919.
27. W. Janik 7. V. 1919.
28. Wł. Bogucki 7. V. 1919.
29. Ks. F. Hortyński 21. V. 1919.
30. Dr W. Dziewulski 18. VI. 1919.
31. Dr W. Wilkosz 5. XI. 1919.
32. Dr S. Dickstein 19. XI. 1919.
33. Dr W. Sierpiński 19. XI. 1919.
34. Dr Z. Janiszewski[2]) 19. XI. 1919
35. Dr St. Mazurkiewicz 19. XI. 1919.
36. St. Zakrocki 19 XI. 1919.
37. L Węgrzynowicz 3. XII. 1919.
38. K Vetulani 3. XII. 1919.
39. Dr E. Żyliński 4. II. 1920.
40. Dr B. Dehryng 5. V. 1920.
41. Dr W. Staniewicz 5. V. 1920.
42. Dr Z. Krygowski 5. V. 1920.
43. J. Wilkoszowa 30. VI. 1920.
44. Dr H. Steinhaus 1. XII. 1920.
45. Dr A. Łomnicki 22. XII. 1920.
46. Dr S. Róziewicz 22. XII 1920.
47. W. Majewski 22 XII. 1920.
48. Dr M. Rudnicki 22. XII. 1920.
49. Dr St. Leśniowski 16. II. 1921.

---

[1]) Zmarł w r. 1919.
[2]) Zmarł w r. 1920.

STATUT

POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO.

I. Cel i siedziba Towarzystwa.

§ 1. Celem „Polskiego Towarzystwa Matematycznego“ jest wszechstronne pielęgnowanie matematyki czystej i stosowanej.

§ 2. Do urzeczywistnienia tego celu służą: a) Odczyty, wygłaszane na posiedzeniach zwyczajnych. b) Wydawanie pisma perjodycznego i prac treści matematycznej. c) Utrzymywanie łączności z matematycznym ruchem naukowym za granicą.

§ 3. Siedzibą Towarzystwa jest Kraków.

§ 4. Członkowie zamiejscowi mogą tworzyć za zgodą Zarządu Towarzystwa osobne oddziały pod nazwą: „Oddział Polskiego Towarzystwa Matematycznego w X“

§ 5. W łonie Towarzystwa mogą powstawać osobne sekcje dla różnych zadań, związanych z celem Towarzystwa.

II. Członkowie.

§ 6. Członkowie Towarzystwa dzielą się na a) zwyczajnych miejscowych t. j. zamieszkałych w Krakowie. i zamiejscowych, b) dożywotnich. c) honorowych.

§ 7. Członkiem zwyczajnym może zostać każda osoba fizyczna lub prawna, która a) zostanie polecona do przyjęcia w Zarządzie Towarzystwa lub Wydziale oddziału przynajmniej przez dwóch członków zwyczajnych, b) zgłoszona przez Zarząd na jednem z posiedzeń zwyczajnych Towarzystwa, względnie przez Wydział na jednem z posiedzeń zwyczajnych oddziału i wybrana większością głosów na następnem, c) uiści do kasy Zarządu względnie do kasy Wydziału wpisowe i roczną wkładkę przepisaną regulaminem.

O przyjęciu lub nieprzyjęciu przez oddział Towarzystwa każdego kandydata na członka zwyczajnego lub dożywotniego zawiadamia Wydział oddziału Zarząd Towarzystwa. Przyjęcie nowego członka przez oddział staje się prawomocnem w 14 dni od chwili tego zawiadomienia, o ile Zarząd nie wniesie sprzeciwu. W przypadku spornym rozstrzyga kwestję przyjęcia najbliższe Walne Zebranie Towarzystwa.

Głosowanie nad przyjęciem członków jest tajne.

§ 8. Członkiem dożywotnim może zostać każda osoba fizyczna lub prawna, która wpłaci na cele Towarzystwa do kasy Zarządu lub Wydziału jednego z oddziałów Towarzystwa kwotę przepisaną regulaminem i którą przyjmie Zarząd względnie Wydział oddziału.

§ 9. Godność członka honorowego może nadać Walne Zebranie Towarzystwa za szczególne zasługi na polu matematyki lub około rozwoju Towarzystwa.

§ 10. Każdy członek Towarzystwa ma prawo: a) brać udział w posiedzeniach zwyczajnych i Walnych Zebraniach Towarzystwa, b) wygłaszać referaty treści matematycznej na posiedzeniach zwyczajnych Towarzystwa, c) ogłaszać swe prace w publikacjach Towarzystwa po przyjęciu tych prac przez komitet redakcyjny, d) korzystać po zniżonych cenach z wydawnictw Towarzystwa.

§ 11. Członkiem zwyczajnym przestaje być, kto: a) zawiadomi pisemnie Zarząd lub Wydział oddziału, do którego uiszcza swe wkładki o wystąpieniu z Towarzystwa b) nie uiści rocznej wkładki mimo upomnień Zarządu lub Wydziału oddziału, do którego należy, c) kto zostanie na wniosek Zarządu lub Wydziału oddziału do którego należy na posiedzeniu zwyczajnem z listy członków wykreślony.

O wystąpieniu członka Towarzystwa, należącego do oddziału, zawiadamia Wydział tego oddziału Zarząd Towarzystwa.

III. Organy Towarzystwa.

§ 12. Organami Towarzystwa są: a) Zarząd, b) Komisja kontrolująca, c) Walne Zebranie Towarzystwa.

Zarząd Towarzystwa.

§ 13. Zarząd składa się z prezesa, dwóch zastępców prezesa, sekretarza, skarbnika i trzech członków, wybieranych przez Walne

Zebranie Towarzystwa a nadto z delegatów oddziałów Towarzystwa, po jednym z każdego oddziału.

§ 14. Dwaj, ale conajwyżej dwaj z trzech członków prezydjum Towarzystwa do którego zalicza się prezesa i dwóch jego zastępców mogą być wybrani z pośród członków zamiejscowych, sekretarz, skarbnik i ci trzej członkowie Zarządu, których wybiera Walne Zebranie Towarzystwa, mogą być wybrani tylko z pośród członków miejscowych.

§ 15. Urzędowanie Zarządu trwa dwa lata.

§ 16 Ustępujący prezes Towarzystwa może być nim wybrany ponownie dopiero po upływie dwu lat.

§ 17. Zadaniem Zarządu jest: a) zwoływać posiedzenia zwyczajne Towarzystwa i przyjmować zgłoszone referaty, b) przedkładać wnioski, dotyczące wyboru nowych członków, c) zawiadywać majątkiem Towarzystwa nie należącym do oddziałów i kierować wydawnictwami Towarzystwa, do czego powołuje Zarząd „Komitet redakcyjny“, d) zwoływać co dwa lata Walne Zebranie Towarzystwa i przedkładać mu sprawozdanie ze swych czynności, a nadto zwoływać nadzwyczajne Walne Zebranie Towarzystwa każdym razem, jeżeli zażąda tego przynajmniej siedmiu członków Towarzystwa, e) przedkładać na sprawozdawczem Walnem Zebraniu Towarzystwa sprawozdanie z działalności oddziałów Towarzystwa przez delegatów oddziałów do Zarządu Towarzystwa, f) spełniać wszelkie funkcje wynikające z postanowień paragrafu 26, g) wykonywać wszelkie uchwały Walnych Zebrań Towarzystwa.

§ 18. Do prawomocności uchwał Zarządu potrzebna jest obecność przynajmniej połowy miejscowych członków Zarządu i jednego członka prezydjum. — Uchwały zapadają prostą większością głosów.

§ 19. Prezes albo jeden z zastępców prezesa i sekretarz Towarzystwa reprezentują Towarzystwo na zewnątrz.

Komisja kontrolująca.

§ 20. Komisja kontrolująca składa się z trzech członków wybranych na dwa lata przez Walne Zebranie; zadaniem jej jest kontrolowanie czynności Zarządu i przedkładanie wniosków o udzielenie Zarządowi absolutorjum na Walnem Zebraniu.

Walne Zebranie Towarzystwa.

§ 21. Walne Zebranie sprawozdawcze zwołuje Zarząd co dwa lata; w razie potrzeby może być zwołane nadzwyczajne Walne Zebranie na żądanie przynajmniej siedmiu członków zwyczajnych. Walne Zebranie odbywa się w Krakowie lub poza Krakowem np. w miejscowościach gdzie istnieją oddziały Towarzystwa, o czem decyduje Zarząd w porozumieniu z Wydziałami oddziałów.

§ 22. Walne Zebranie sprawozdawcze a) decyduje o udzieleniu ustępującemu Zarządowi absolutorjum na wniosek komisji kontrolującej, b) przyjmuje do wiadomości sprawozdania z działalności oddziałów Towarzystwa, składane przez delegatów oddziałów do Zarządu Towarzystwa, c) wybiera nowy Zarząd i komisję kontrolującą, d) rozstrzyga kwestje sporne między Zarządem Towarzystwa a Wydziałami jego oddziałów, e) zatwierdza wnioski dotyczące zmiany statutu lub regulaminu i wnioski dotyczące rozwiązania Towarzystwa i przekazania jego majątku.

§ 23. Prawo głosowania na Walnych Zebraniach posiada każdy członek Towarzystwa, bez względu na to, czy należy do osobnego oddziału Towarzystwa. Wszystkie wnioski przechodzą prostą większością głosów z wyjątkiem wniosków dotyczących zmiany statutu lub rozwiązania Towarzystwa, do czego potrzeba $^2/_3$ głosów wszystkich członków obecnych.

§ 24. Głosowanie w sprawie wyboru prezesa, członków Zarządu i komisji kontrolującej jest tajne.

§ 25. W wyborze prezesa i członków Zarządu mogą uczestniczyć nieobecni na Walnem Zebraniu członkowie przez przysłanie swego głosu w liście zamkniętym, który Zarząd otwiera w czasie głosowania.

§ 26. Do prawomocności uchwał Walnego Zebrania potrzebna jest obecność przynajmniej $^1/_4$ części wszystkich członków zwyczajnych. W razie braku tej liczby może być zwołane ponowne Walne Zebranie, którego uchwały stają się prawomocne bez względu na liczbę obecnych członków.

§ 27. O terminie Walnego Zebrania zawiadamia Zarząd pisemnie każdego członka z osobna.

IV. Oddziały Towarzystwa i ich organy.

§ 28. Oddział Towarzystwa może powstać za zgodą Zarządu Towarzystwa na wniosek przynajmniej pięciu członków zamiejsco-

wych, zamieszkałych w tej samej miejscowości. Celem oddziału jest stworzenie matematycznego ogniska naukowego i odbywanie posiedzeń zwyczajnych.

§ 29. Członkami oddziału są członkowie Towarzystwa, przyjęci na podstawie § 7. lub § 8. którzy płacą swe wkładki do kasy tego oddziału. Czwartą część wkładek swych członków wysyła Wydział oddziału co dwa lata do kasy Zarządu Towarzystwa na cele ogólne Towarzystwa. Wpisowe członków zwyczajnych przyjętych przez oddział pozostaje w całości w kasie tego oddziału.

§ 30. Organami oddziału są: a) Wydział, b) Komisja kontrolująca, c) Walne Zebranie oddziału.

§ 31. Wydział składa się z prezesa oddziału, jego zastępcy, sekretarza, skarbnika i dwóch członków wybranych na dwa lata przez Walne Zebranie oddziału. Jeden z członków Wydziału, wyznaczony przez Walne Zebranie oddziału, jest delegatem oddziału do Zarządu Towarzystwa.

§ 32. Zadaniem Wydziału jest: a) Zwoływanie posiedzeń zwyczajnych oddziału i przyjmowanie zgłoszonych referatów, b) przedkładanie na posiedzeniach zwyczajnych oddziału wniosków w sprawie wyboru nowych członków Towarzystwa i zawiadamianie Zarządu Towarzystwa o przyjęciu lub nieprzyjęciu zgłoszonych kandydatów, c) zawiadywanie majątkiem oddziału i przedkładanie Zarządowi Towarzystwa przed każdem sprawozdawczem Walnem Zebraniem Towarzystwa sprawozdań z działalności oddziału za pośrednictwem swego delegata do Zarządu Towarzystwa, d) zwoływanie raz na dwa lata Walnych Zebrań oddziału, na których Wydział przedkłada sprawozdanie ze swych czynności, e) zwoływanie nadzwyczajnych Walnych Zebrań oddziału każdym razem na żądanie przynajmniej pięciu członków oddziału.

§ 33. Komisja kontrolująca oddziału składa się z dwóch członków, wybranych na dwa lata przez Walne Zebranie oddziału. Zadaniem komisji jest przedkładanie na sprawozdawczem Walnem Zebraniu oddziału wniosków o udzielenie absolutorjum ustępującemu Wydziałowi.

§ 34. Sprawozdawcze Walne Zebranie oddziału a) decyduje o udzieleniu absolutorjum ustępującemu Wydziałowi, b) wybiera nowy Wydział i komisję kontrolującą, c) wybiera z pośród członków nowego Wydziału delegata do Zarządu Towarzystwa, d) uchwala o rozwiązaniu oddziału. Głosowanie w sprawie wyboru Wydziału,

komisji kontrolującej i delegata do Zarządu Towarzystwa jest tajne.

§ 35. Prawo głosowania i wybieralności na Walnych Zebraniach oddziału posiadają tylko ci członkowie Towarzystwa, którzy należą do oddziału

§ 36. Do prawomocności uchwał Walnego zebrania oddziału potrzebna jest obecność przynajmniej $^1/_3$ części członków Towarzystwa należących do oddziału. W razie braku tej liczby może być zwołane Walne Zebranie bez względu na liczbę członków obecnych. O terminie Walnego Zebrania zawiadamia Wydział z osobna każdego z członków Towarzystwa należących do oddziału.

§ 37. Majątek oddziału stanowią: a) Wpisowe i wkładki członków zwyczajnych i dożywotnich Towarzystwa, należących do oddziału, po potrąceniu $^1/_4$ części wkładek na rzecz Zarządu Towarzystwa, b) subwencje i dobrowolne datki, złożone do kasy oddziału, c) książki i pisma nadsyłane do oddziału.

Majątek oddziału jest własnością całego Towarzystwa W razie rozwiązania oddziału, przechodzi jego majątek pod administrację Zarządu Towarzystwa, o ile Walne Zebranie Towarzystwa na wniosek członków rozwiązującego się oddziału inaczej nie postanowi.

V. Majątek Towarzystwa.

§ 38. Majątek Towarzystwa stanowią: a) wpisowe wszystkich członków zwyczajnych, b) roczne wkładki członków zwyczajnych i wkładki członków dożywotnich, c) subwencje i datki dobrowolne złożone na rzecz Zarządu lub oddziałów Towarzystwa, d) książki i pisma nadsyłane do Zarządu lub do oddziałów Towarzystwa, e) różne dochody nadzwyczajne.

§ 39. Zarząd Towarzystwa administruje majątkiem Towarzystwa, nie należącym do oddziałów, Wydział oddziału administruje majątkiem Towarzystwa należącym do oddziału

Zarząd Towarzystwa i Wydziały jego oddziałów mogą wspólnie w razie jednomyślnej zgody podejmować zarządzenia dotyczące majątku ruchomego i nieruchomego całego Towarzystwa. Kwestje sporne rozstrzyga Walne Zebranie Towarzystwa.

VI. Rozwiązanie Towarzystwa.

§ 40. Rozwiązanie Towarzystwa może uchwalić Walne Zebranie Towarzystwa większością $^2/_3$ głosów. W razie rozwiązania

przechodzi majątek Towarzystwa na własność istniejących polskich Towarzystw naukowych, o czem decyduje Walne Zebranie Towarzystwa.

REGULAMIN

„POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO".

§ 1. Urzędowanie Zarządu Towarzystwa i Wydziału każdego z oddziałów trwa dwa lata i kończy się w dniu Zielonych Świąt Sprawozdawcze Walne Zebrania odbywają się w maju lub czerwcu.

§ 2, Wpisowe członka zwyczajnego wynosi 30 M., a wkładka roczna 60 M. Wkładki roczne są płatne z góry i liczą się zawsze za czas do Zielonych Świąt bez względu na datę przystąpienia do Towarzystwa.

§ 3. Jednorazowa wkładka członka dożywotniego wynosi 1000 M.

§ 4. Posiedzenia zwyczajne odbywają się przynajmniej raz w miesiącu, z wyjątkiem trzech miesięcy wakacyjnych. W Krakowie odbywają się posiedzenia zwyczajne w pierwszy i trzeci wtorek miesiąca o godzinie 5 wieczorem w lokalu Seminarjum matematycznego, ul. św. Anny 12 parter. Zgłoszone referaty i datę posiedzenia zwyczajnego ogłasza Zarząd Towarzystwa względnie Wydział oddziału -- ile to możliwe — w miejscowych dziennikach i w lokalu Towarzystwa względnie oddziału.

§ 5. Na posiedzeniach zwyczajnych przewodniczy prezes, jego zastępca lub najstarszy wiekiem członek zwyczajny. Sekretarz odczytuje sprawozdanie z posiedzenia poprzedniego, poczem następuje wybór zgłoszonych członków, wreszcie referaty i dyskusja.

§ 6. Referaty odbywają się w zasadzie w porządku w jakim zostały w Zarządzie Towarzystwa, względnie w Wydziale oddziału zgłoszone. Referent ma obowiązek dać skrót swego referatu sekretarzowi, celem umieszczenia go w protokole.

§ 7. Sekretarz Zarządu względnie Wydziału prowadzi księgę protokołów posiedzeń zwyczajnych i Walnych Zebrań, a nadto księgę działalności Zarządu względnie Wydziału.

Skarbnik prowadzi księgę wszelkich dochodów i wydatków.

Z chwilą powstania bibljoteki Zarząd względnie Wydział wybiera z pośród swych członków bibljotekarza.

§ 8. Wydawnictwami Towarzystwa kieruje komitet redakcyjny, powołany przez Zarząd Towarzystwa. Ilość członków komitetu redakcyjnego zależy od ilości wydawnictw.

§ 9. W wydawnictwach Towarzystwa ogłasza Zarząd drukiem przedewszystkiem prace członków Towarzystwa, przyjęte przez komitet redakcyjny i to w porządku w jakim te prace zostały do Zarządu zgłoszone. Prace mogą być drukowane w języku polskim lub obcym.

§ 10. Autor otrzymuje 25 odbitek swej pracy, ogłoszonej w wydawnictwach Towarzystwa, reszta staje się własnością Towarzystwa. Członkowie Towarzystwa otrzymują po jednym egzemplarzu wszystkich wydawnictw Towarzystwa bezpłatnie lub po cenach zniżonych, zależnie od kosztów wydawnictwa.

SPIS TREŚCI.